3. feladatsor – Determinánsok

3.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha egy mátrix minden eleme racionális szám, akkor a mátrix determinánsa is racionális szám.
(b) Ha egy mátrix minden eleme irracionális szám, akkor a mátrix determinánsa is irracionális szám.
(c) Ha egy mátrix minden eleme racionális szám és a determinánsa $\frac{1}{8}$, akkor a mátrixban van olyan elem, amelynek nevezője páros szám.
(d) Ha egy tetszőleges T test feletti 2×2-es mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix mindkét sora a másik sorának skalárszorosa.
(e) Ha egy tetszőleges T test feletti 2×2-es mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix valamelyik sora a másik sorának skalárszorosa.
(f) Ha egy tetszőleges T test feletti 3×3-as mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix valamelyik sora valamelyik másik sorának skalárszorosa.
(g) Ha egy $\mathbb{Q}$ feletti $n \times n$-es mátrix minden eleme páros szám, akkor a mátrix determinánsa 2^n-nel osztható egész szám.
(h) Ha egy mátrix determinánsa páros szám, akkor a mátrix minden eleme páros szám.
(i) Ha egy mátrix determinánsa páros szám, akkor a mátrix valamelyik eleme páros szám.

3.2. Feladat. Határozza meg a következő $\mathbb{R}$ feletti determinánsokat:

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}; \qquad \text{(b)} \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{vmatrix}; \qquad \text{(c)} \begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 5 & -4 \\ 2 & -5 & 8 \end{vmatrix};$$

$$\text{(d)} \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}; \quad \text{(e)} \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}; \quad \text{(f)} \begin{vmatrix} 4 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 1 & 7 & -1 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -3 & 6 & -4 \\ -3 & -5 & 2 & 5 & 8 \end{vmatrix}.$$

3.3. Feladat. Határozza meg az

$$\text{(a)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}; \quad \text{(c)} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\mathbb{Z}_3$ feletti determinánsokat és az

$$\text{(d)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{(e)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad \text{(f)} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$\mathbb{Z}_2$ feletti determinánsokat.

3.4. Feladat. Adja meg a $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogatát:
(a) $v_1 = (1, 2, -3)$, $v_2 = (2, 1, -4)$, $v_3 = (1, 0, 3)$;
(b) $v_1 = (1, 8, 5)$, $v_2 = (-2, 5, 11)$, $v_3 = (5, 9, 12)$.

3.5. Feladat. Adja meg az x értékét úgy, hogy teljesüljön az egyenlőség:

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = 8; \qquad \text{(b)}\ \begin{vmatrix} 0 & x & -6 \\ x & -7 & -5 \\ 4 & 2 & -4 \end{vmatrix} = 0.$$

3.6. Feladat. Számolja ki a

$$\begin{vmatrix} 24 & 11 & 13 & 17 & 19 \\ 51 & 13 & 32 & 40 & 46 \\ 61 & 11 & 14 & 50 & 56 \\ 62 & 20 & 7 & 13 & 52 \\ 80 & 24 & 45 & 57 & 70 \end{vmatrix}$$

$\mathbb{Q}$ feletti determinánst.

3.7. Feladat. Határozza meg x^3 együtthatóját az alábbi $\mathbb{R}$ feletti determinánsban:

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & x \end{vmatrix}.$$

3.8. Feladat. Számítsa ki a következő $\mathbb{Q}$ feletti determinánsokat:

$$\text{(a)}\ \begin{vmatrix} 6 & 3 & 3 & 3 \\ 8 & -4 & 4 & -4 \\ 2 & -2 & 4 & -8 \\ 6 & 9 & 27 & 81 \end{vmatrix}; \qquad \text{(b)}\ \begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 4 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 12 & 6 & 12 & 24 & 48 \\ 4 & -3 & 9 & -27 & 81 \end{vmatrix}.$$

3.9. Feladat. Számítsa ki a következő $\mathbb{R}$ feletti $n \times n$-es determinánst:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Szorgalmi feladatok

3.10. Feladat. Legyen $a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & \text{ha } i \neq j; \\ 2, & \text{ha } i = j. \end{cases}$ Számítsa ki az $A = (a_{ij})_{n \times n}$ mátrix determinánsát.

3.11. Feladat. Ha olyan nemnulla determinánsú $n \times n$-es mátrixot akarunk felírni, amelyben minden elem 0 vagy 1, akkor legalább hány 1-t kell felhasználnunk? És mennyi a 0-k számának minimuma?

A következő feladatokban a determinánsok értékét kell kiszámolni; ha nem derül ki a determináns rendje, akkor n-edrendűnek kell tekinteni.

3.12. Feladat.

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$$

3.13. Feladat.

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

3.14. Feladat.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

3.15. Feladat.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

3.16. Feladat. Számítsa ki a következő determinánst a determináns kifejtése nélkül:

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix}.$$

3.17. Feladat. A determinánsok kifejtése nélkül igazolja, hogy

$$\begin{vmatrix} b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \\ b_3+c_3 & c_3+a_3 & a_3+b_3 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

3.18. Feladat. Egy A mátrixot *ferdén szimmetrikusnak* nevezünk, ha $A^T = -A$. Bizonyítsuk be, hogy ha n páratlan, akkor bármely ferdén szimmetrikus $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrix determinánsa 0. Igaz-e ugyanez az állítás $\mathbb{R}$ helyett a $\mathbb{Z}_2$, illetve a $\mathbb{Z}_3$ test esetén?