2. feladatsor – Mátrixok – Eredmények

2.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) $\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{1\le i\le n} i$ minden n pozitív egészre;
(b) $\sum_{1\ge i>n} 1 = 1$ minden n pozitív egészre;
(c) $\prod_{i,j=1}^{n} i = n!$ minden n pozitív egészre;
(d) $((\lambda A)(\lambda B))^{\mathrm{T}} = \lambda^2 \left(B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}\right)$ érvényes tetszőleges T test, $\lambda \in T$ skalár és $A, B \in T^{n\times n}$ mátrixok esetén;
(e) tetszőleges T test feletti diagonális $A, B \in T^{n\times n}$ mátrixok esetén az $A+B$ és az AB mátrix is diagonális;
(f) tetszőleges T test feletti szimmetrikus $A, B \in T^{n\times n}$ mátrixok esetén az $A+B$ és az AB mátrix is szimmetrikus.

Eredmény. igaz, hamis, hamis, igaz, igaz, hamis

2.2. Feladat. Számítsa ki az

(a) $A+B,\ 3A,\ B^{\mathrm{T}},\ BC,\ AC,\ D(B+C^{\mathrm{T}})$;
(b) $A+C^{\mathrm{T}},\ 3B,\ DA,\ B^{\mathrm{T}}D,\ (A^{\mathrm{T}}+C)D$;
(c) $C^{\mathrm{T}}+B,\ 4C,\ DB,\ A^{\mathrm{T}}D,\ D(C^{\mathrm{T}}+A)$

mátrixokat a következő valós mátrixokra:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Eredmény. (a) $A+B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$, $3A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -6 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$, $B^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $BC = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$, $AC = \begin{pmatrix} 1 & 10 \\ 1 & -6 \end{pmatrix}$, $D(B+C^{\mathrm{T}}) = \begin{pmatrix} 6 & -8 & -5 \\ 12 & -6 & -9 \end{pmatrix}$;

(b) $A+C^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 4 & -3 & -1 \end{pmatrix}$, $3B = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -3 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, $DA = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 6 & -3 & 9 \end{pmatrix}$,
$B^{\mathrm{T}}D = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ -3 & 6 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $(A^{\mathrm{T}}+C)D = \begin{pmatrix} -2 & 16 \\ -1 & -7 \\ 2 & -7 \end{pmatrix}$;

(c) $C^{\mathrm{T}}+B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, $4C = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 4 & -8 \\ 0 & -16 \end{pmatrix}$, $DB = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 6 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

$A^{\mathrm{T}}D = \begin{pmatrix} -1 & 8 \\ 0 & -3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$, $D(C^{\mathrm{T}} + A) = \begin{pmatrix} 6 & -7 & 0 \\ 12 & -9 & -3 \end{pmatrix}$.

2.3. Feladat. Számítsa ki az
(a) $AB,\ BC,\ FB^{\mathrm{T}},\ G^2,\ (A + B^{\mathrm{T}})D$;
(b) $BA,\ DC,\ BG,\ D^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}},\ AD + B^{\mathrm{T}}D$;
(c) $B + A^{\mathrm{T}},\ CB,\ CD,\ F^{\mathrm{T}}A,\ (A + B)C$.
mátrixokat (amennyiben léteznek) a következő valós mátrixokra:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eredmény. (a) $AB = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$, BC nem létezik, $FB^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$,

$G^2 = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 6 & 2 \end{pmatrix}$, $(A + B^{\mathrm{T}})D = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \end{pmatrix}$;

(b) $BA = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 0 & -4 & 4 \\ 4 & -4 & 8 \end{pmatrix}$, $DC = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \end{pmatrix}$, BG nem létezik, $D^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$, $AD + B^{\mathrm{T}}D = \begin{pmatrix} 1 \\ 16 \end{pmatrix}$;

(c) $B + A^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}$, $CB = \begin{pmatrix} -1 & 4 \end{pmatrix}$, $CD = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}$, $F^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$, $(A + B)C$ nem létezik.

2.4. Feladat. Számítsa ki az
(a) $B + C^{\mathrm{T}},\ FG^{\mathrm{T}},\ -CA,\ (B + C^{\mathrm{T}})A,\ GF^{\mathrm{T}} - D$;
(b) $BA + C,\ AC,\ AB^{\mathrm{T}},\ D^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}},\ A(B^{\mathrm{T}} - C)$;
(c) $BC,\ -CB,\ FF^{\mathrm{T}} - F^{\mathrm{T}}F,\ C^{\mathrm{T}}A,\ G^{\mathrm{T}}(B + C^{\mathrm{T}})$.
mátrixokat (amennyiben léteznek) a következő $\mathbb{Z}_3$ feletti mátrixokra:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eredmény. (a) $B+C^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$, $FG^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, $-CA$ nem létezik, $(B+C^{\mathrm{T}})A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $GF^{\mathrm{T}} - D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

(b) $BA+C$ nem létezik, $AC = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $AB^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$, $D^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A(B^{\mathrm{T}} - C) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

(c) $BC = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, $-CB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $FF^{\mathrm{T}} - F^{\mathrm{T}}F$ nem létezik, $C^{\mathrm{T}}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $G^{\mathrm{T}}(B+C^{\mathrm{T}}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

2.5. Feladat. Számítsa ki az f polinom helyettesítési értékét az A helyen, ha

(a) $f(x) = x^2 + x + 1$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$;

(b) $f(x) = x^2 - x - 1$, $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 3}$;

(c) $f(x) = x^2 - 5x + 3$, $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$;

(d) $f(x) = x^2 + 3x - 4$, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

Eredmény. (a) $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$;

(b) $f(A) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 3}$;

(c) $f(A) = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$;

(d) $f(A) = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -12 \\ 26 & 12 & -2 \\ 22 & 12 & -3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

2.6. Feladat. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Adja meg az összes olyan $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixot, amely A-val felcserélhető azaz amelyre $AB = BA$ teljesül.

Eredmény.

$$\begin{pmatrix} -2c+d & -2c \\ c & d \end{pmatrix} \quad c, d \in \mathbb{R}$$

2.7. Feladat. Döntse el, hogy teljesülnek-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges $n \times n$-es valós A, B mátrixok és k, m pozitív egészek esetén, és döntését röviden indokolja:

(a) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$;
(b) $A^k A^m = A^{k+m}$;
(c) $(A^k)^m = A^{km}$;
(d) $(AB)^k = A^k B^k$.

Eredmény. nem, igen, igen, nem