2. feladatsor – Mátrixok

2.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) $\sum_{i=1}^{n} i = \sum_{1\leq i\leq n} i$ minden n pozitív egészre;
(b) $\sum_{1\geq i>n} 1 = 1$ minden n pozitív egészre;
(c) $\prod_{i,j=1}^{n} i = n!$ minden n pozitív egészre;
(d) $((\lambda A)(\lambda B))^{\mathrm{T}} = \lambda^2 \left(B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}\right)$ érvényes tetszőleges T test, $\lambda \in T$ skalár és $A, B \in T^{n\times n}$ mátrixok esetén;
(e) tetszőleges T test feletti diagonális $A, B \in T^{n\times n}$ mátrixok esetén az $A+B$ és az AB mátrix is diagonális;
(f) tetszőleges T test feletti szimmetrikus $A, B \in T^{n\times n}$ mátrixok esetén az $A+B$ és az AB mátrix is szimmetrikus.

2.2. Feladat. Számítsa ki az

(a) $A+B,\ 3A,\ B^{\mathrm{T}},\ BC,\ AC,\ D(B+C^{\mathrm{T}})$;
(b) $A+C^{\mathrm{T}},\ 3B,\ DA,\ B^{\mathrm{T}}D,\ (A^{\mathrm{T}}+C)D$;
(c) $C^{\mathrm{T}}+B,\ 4C,\ DB,\ A^{\mathrm{T}}D,\ D(C^{\mathrm{T}}+A)$

mátrixokat a következő valós mátrixokra:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

2.3. Feladat. Számítsa ki az

(a) $AB,\ BC,\ FB^{\mathrm{T}},\ G^2,\ (A+B^{\mathrm{T}})D$;
(b) $BA,\ DC,\ BG,\ D^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}},\ AD+B^{\mathrm{T}}D$;
(c) $B+A^{\mathrm{T}},\ CB,\ CD,\ F^{\mathrm{T}}A,\ (A+B)C$.

mátrixokat (amennyiben léteznek) a következő valós mátrixokra:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.4. Feladat. Számítsa ki az

(a) $B+C^{\mathrm{T}},\ FG^{\mathrm{T}},\ -CA,\ (B+C^{\mathrm{T}})A,\ GF^{\mathrm{T}}-D$;
(b) $BA+C,\ AC,\ AB^{\mathrm{T}},\ D^{\mathrm{T}}C^{\mathrm{T}},\ A(B^{\mathrm{T}}-C)$;
(c) $BC,\ -CB,\ FF^{\mathrm{T}}-F^{\mathrm{T}}F,\ C^{\mathrm{T}}A,\ G^{\mathrm{T}}(B+C^{\mathrm{T}})$.

mátrixokat (amennyiben léteznek) a következő $\mathbb{Z}_3$ feletti mátrixokra:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \; F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \; G = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.5. Feladat. Számítsa ki az f polinom helyettesítési értékét az A helyen, ha

(a) $f(x) = x^2 + x + 1,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$;

(b) $f(x) = x^2 - x - 1,\ A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 3}$;

(c) $f(x) = x^2 - 5x + 3,\ A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 2}$;

(d) $f(x) = x^2 + 3x - 4,\ A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$.

2.6. Feladat. Legyen $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$. Adja meg az összes olyan $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrixot, amely A-val felcserélhető, azaz amelyre $AB = BA$ teljesül.

2.7. Feladat. Döntse el, hogy teljesülnek-e az alábbi egyenlőségek tetszőleges $n \times n$-es valós A, B mátrixok és k, m pozitív egészek esetén, és döntését röviden indokolja:

(a) $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$;

(b) $A^k A^m = A^{k+m}$;

(c) $(A^k)^m = A^{km}$;

(d) $(AB)^k = A^k B^k$.

Szorgalmi feladatok

2.8. Feladat. Legyen A tetszőleges $n \times k$ méretű mátrix, és legyenek i, j olyan pozitív egészek, amelyekre $i \leq n$, $j \leq k$. Adjon meg olyan P, illetve Q mátrixokat, melyekre a PAQ szorzat az az 1×1-es mátrix, melynek egyetlen eleme az A mátrix i-edik sorának j-edik eleme.

2.9. Feladat. Határozza meg az $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{Z}_3$ feletti $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix n-edik hatványát tetszőleges n pozitív egészre.

2.10. Feladat. Határozza meg a $\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ valós mátrix n-edik hatványát tetszőleges n pozitív egészre.

2.11. Feladat. Határozza meg a $\mathbb{Q}$, illetve $\mathbb{Z}_2$ feletti $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix n-edik hatványát tetszőleges n pozitív egészre.

2.12. Feladat. Határozza meg az $\begin{pmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ valós mátrix n-edik hatványát tetszőleges n pozitív egészre.

2.13. Feladat. Oldja meg az $AX = E$ mátrixegyenletet, ahol A az alábbi $n \times n$-es valós mátrix:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

2.14. Feladat. Határozza meg az összes olyan 2×2-es $\mathbb{R}$, illetve $\mathbb{Z}_3$ feletti mátrixot, melynek négyzete a nullmátrix. A $\mathbb{Z}_3$ feletti esetben sorolja fel a megfelelő mátrixokat.

2.15. Feladat. Az $A = (a_{ij})_{n\times n} \in T^{n\times n}$ (T tetszőleges test) mátrix *nyoma* (trace) a főátlóban lévő elemek összege: $\mathrm{tr}(A) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$.
Igazolja, hogy bármely A valós mátrixra $\mathrm{tr}\left(AA^{\mathrm{T}}\right) \geq 0$, és egyenlőség csak $A = \underline{0}$ esetén áll fenn.

2.16. Feladat. Igazolja, hogy tetszőleges T testre és $A, B \in T^{n\times n}$ mátrixokra
(a) $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$;
(b) $AB - BA \neq E$.

2.17. Feladat. Mutassa meg, hogy tetszőleges $Q, R, A \in T^{n\times n}$ mátrixokra teljesül, hogy ha $RQ = E$, akkor $\mathrm{tr}(QAR) = \mathrm{tr}(A)$.

2.18. Feladat. Az exponenciális függvényre ismert a következő képlet:

$$\exp(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Itt $e \sim 2.718\,281$ a természetes logaritmus alapszáma, a végtelen összeget pedig egyelőre elég intuitívan értelmezni. Számítsa ki az $\exp\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ mátrixot.