1. feladatsor – Ismétlés

1.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Ha v_1, v_2, v_3 tetszőleges vektorok a síkban, akkor a sík összes vektora előáll $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ alakban valamely $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ valós számokra.

(b) Ha v_1, v_2, v_3 olyan vektorok a síkban, melyek közül kettő nem párhuzamos, akkor a sík összes vektora előáll $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ alakban valamely $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ valós számokra.

(c) Ha v_1, v_2, v_3 tetszőleges vektorok a térben, akkor a tér összes vektora előáll $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ alakban valamely $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ valós számokra.

(d) Ha v_1, v_2, v_3 olyan vektorok a térben, melyek közül kettő nem párhuzamos, akkor a tér összes vektora előáll $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ alakban valamely $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ valós számokra.

(e) Ha v_1, v_2, v_3 olyan vektorok a térben, melyek közül semelyik kettő nem párhuzamos, akkor a tér összes vektora előáll $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ alakban valamely $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ valós számokra.

(f) Ha v_1, v_2, v_3 olyan vektorok a térben, melyek nincsenek egy síkban, akkor a tér összes vektora előáll $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3$ alakban valamely $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ valós számokra.

1.2. Feladat. Váltsa át a fokokban megadott alábbi szögeket radiánra:

(a) $30°, 225°, -45°, 480°, -510°, 270°$;

(b) $0°, 150°, -60°, 900°, -765°, -210°$.

1.3. Feladat. Váltsa át a radiánban megadott alábbi szögeket fokra:

(a) $-\frac{\pi}{2}, \frac{13\pi}{3}, \frac{27\pi}{4}, -\frac{7\pi}{3}, \frac{19\pi}{6}$;

(b) $-\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{2}, \frac{11\pi}{3}, -\frac{5\pi}{6}, \frac{9\pi}{3}$.

1.4. Feladat. Adja meg (pontosan, ne csak közelítőleg) az előző feladatban megadott szögek szinuszát, koszinuszát, tangensét.

1.5. Feladat. Adja meg azokat az

$$I\colon 0 \le \alpha, \beta < 2\pi, \quad J\colon -\pi < \alpha, \beta \le \pi \quad \text{és} \quad K\colon 3\pi \le \alpha, \beta < 4\pi$$

intervallumba eső α, illetve β szögeket radiánban, amelyekre $\sin\alpha$, illetve $\cos\beta$ rendre a következő számokkal egyenlő:

(a) $0, \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}$;

(b) $-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{1}{2}, 1, \frac{\sqrt{3}}{2}$.

1.6. Feladat. Határozza meg

(a) a síkban az $x - y = 0$ és az $x - 3y = 2$ egyenes metszéspontját;

(b) a térben az $x - y - z = 0$ sík és az $x = 2, y - z = 0$ egyenes metszéspontját.

1.7. Feladat. Adja meg a síkban az alábbi e egyenes és P pont esetén a P pont e-re vonatkozó tükörképét:

(a) $e\colon x = 0,\ P = (-2, 3)$;

(b) $e\colon x - 3y = 0,\ P = (7, -1)$;

(c) $e\colon x - y = 0,\ P = (-4, 1)$;

(d) $e\colon 2x+y=0,\ P=(3,4)$.

1.8. Feladat. Adja meg a síkban az alábbi α szög és P pont esetén a P pont képét az origó körüli α szögű elforgatás mellett:
(a) $\alpha=\frac{\pi}{3},\ P=(-1,0)$;
(b) $\alpha=-\frac{3\pi}{4},\ P=(-1,-2)$;
(c) $\alpha=\frac{3\pi}{4},\ P=(1,-1)$;
(d) $\alpha=-\frac{2\pi}{3},\ P=(3,4)$.

Szorgalmi feladatok

1.9. Feladat. Adja meg paraméteres formában az $x+y+2z=0$ és az $x-y=0$ sík metszésegyenesét.

1.10. Feladat. Adja meg a térben az alábbi s sík és P pont esetében a P pont s-re vonatkozó tükörképét:
(a) $s\colon x=0,\ P=(1,-1,1)$;
(b) $s\colon x-y=0,\ P=(-2,1,-1)$;
(c) $s\colon x+y+z=0,\ P=(1,0,0)$.

1.11. Feladat. Adja meg a térben az alábbi α szög, e egyenes és P pont esetén a P pont képét az e körüli α szögű elforgatás mellett.
(a) $\alpha=\frac{\pi}{3},\ e\colon y=z=0$ (azaz az x-tengely), $P=(-1,0,1)$;
(b) $\alpha=-\frac{\pi}{2},\ e\colon x=y, z=0,\ P=(0,0,1)$;
(c) $\alpha=\frac{2\pi}{3},\ e\colon x=y=z,\ P=(1,0,0)$.

1.12. Feladat. Adjon meg olyan vektort a térben, amely merőleges az alábbi v_1, v_2 vektorokra. Ha vannak nempárhuzamos ilyen vektorok is, akkor adjon meg három ilyen vektort, melyek közül semelyik kettő nem párhuzamos.
(a) $v_1=(0,0,0),\ v_2=(1,2,-2)$;
(b) $v_1=(1,0,1),\ v_2=(2,1,-1)$;
(c) $v_1=(-1,1,\sqrt{2}),\ v_2=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2},-1)$.

1.13. Feladat. Tetszőleges v_1, v_2 térbeli vektor esetén adjon meg v_1, v_2 koordinátái segítségével olyan vektort, amely v_1-re és v_2-re is merőleges. (Törekedjen arra, hogy minél egyszerűbb legyen a kapott képlet.)

1.14. Feladat. Igazolja, hogy ha v_1, v_2, v_3 olyan térbeli vektorok, amelyek nincsenek egy síkban, akkor a v_1, v_2, v_3 vektorok által meghatározott paralelepipedon térfogata

$$|v_{11}v_{22}v_{33}+v_{12}v_{23}v_{31}+v_{13}v_{21}v_{32}-v_{11}v_{23}v_{32}-v_{12}v_{21}v_{33}-v_{13}v_{22}v_{31}|.$$

(Alkalmazza az előző feladat eredményét.)