

11. feladatsor – Kvadratikus alakok

11.1. Feladat. Jelölje T a \mathbb{Q} , \mathbb{R} számtestek valamelyikét. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

- (a) Minden T feletti véges dimenziós vektortéren értelmezett kvadratikus alak kanonikus alakra hozható nemelfajuló lineáris helyettesítéssel.
- (b) Minden T feletti véges dimenziós vektortéren értelmezett kvadratikus alak normálalakra hozható nemelfajuló lineáris helyettesítéssel.
- (c) Kvadratikus alakok bármely bázisban felírt mátrixának rangja ugyanaz.
- (d) Bármely A négyzetes mátrixhoz létezik olyan S nemelfajuló mátrix, amelyre SAS^T diagonális.
- (e) Ha egy valós kvadratikus alak pozitív definit, akkor bármely vektort behelyettesítve pozitív valós számot kapunk.
- (f) Ha egy valós kvadratikus alak negatív szemidefinit, akkor akármelyik vektort helyettesítjük be, nem kaphatunk pozitív számot.
- (g) Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrixhoz tartozó kvadratikus alak pontosan akkor pozitív definit, ha A főminorai pozitívak.
- (h) Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrixhoz tartozó kvadratikus alak pontosan akkor negatív definit, ha A főminorai negatívak.

11.2. Feladat. Melyek bilineárisak az alábbi leképezések közül? Ha leképezés bilineáris, akkor adja meg a mátrixát a standard bázisban. Ha a leképezés szimmetrikus bilineáris leképezés, akkor adja meg a hozzá tartozó kvadratikus alakot is.

- (a) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_2y_2$;
- (b) $\ell : \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$, $\ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = 3$;
- (c) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_2 - x_1y_1$;
- (d) $\ell : \mathbb{Q}^2 \times \mathbb{Q}^2 \rightarrow \mathbb{Q}$, $\ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1x_2$;
- (e) $\ell : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $\ell((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1y_1 + x_2y_2$.

11.3. Feladat. Hozza kanonikus alakra a V vektortéren értelmezett kvadratikus alakokat, és adja meg a nemelfajuló lineáris helyettesítés mátrixát. Valós kvadratikus alakok esetén adja meg a normálalakot is, és határozza meg az osztályát (pozitív/negatív (szemi)definit, indefinit).

- (a) $V = \mathbb{R}^2$, $x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2$;
- (b) $V = \mathbb{Q}^2$, $-4x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2$;
- (c) $V = \mathbb{R}^2$, $-4x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2$;
- (d) $V = \mathbb{R}^3$, $-4x_1^2 + 4x_1x_2 - 4x_2^2$;
- (e) $V = \mathbb{R}^3$, $8x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_1x_3$;
- (f) $V = \mathbb{Q}^3$, $x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
- (g) $V = \mathbb{R}^3$, $x_1^2 + 6x_2^2 + 4x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_2x_3$;
- (h) $V = \mathbb{R}^3$, $2x_1x_3 - 2x_1x_2 - 2x_2x_3$;
- (i) $V = \mathbb{R}^3$, $-x_1^2 - 6x_2^2 - 14x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;
- (j) $V = \mathbb{R}^4$, $-x_1^2 - 6x_2^2 - 14x_3^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 4x_2x_3$;
- (k) $V = \mathbb{R}^3$, $x_1^2 + 9x_2^2 + 7x_3^2 + 6x_1x_2 + 4x_1x_3 + 12x_2x_3$;
- (l) $V = \mathbb{R}^4$, $x_1^2 + 5x_2^2 + 11x_3^2 + 8x_4^2 + 4x_1x_2 - 2x_1x_4 - 6x_2x_3 - 4x_2x_4 + 8x_3x_4$;
- (m) $V = \mathbb{R}^8$, x_4x_7 .

11.4. Feladat. Adjon meg az alábbi A szimmetrikus mátrixok esetén olyan S nemelfajuló mátrixot, amelyre SAS^T diagonális.

(a) $A = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2 \times 2};$

(b) $A = \begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3};$

(c) $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3 \times 3};$

(d) $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & 5 & -3 & -2 \\ 0 & -3 & 11 & 4 \\ -1 & -2 & 4 & 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{4 \times 4}.$

Szorgalmi feladatok

11.5. Feladat. Adjon példát olyan \mathbb{R}^4 -en értelmezett kvadratikus alakra, amely

- (a) 1 tagot tartalmaz és indefinit;
- (b) 8 (nemnulla) tagot tartalmaz és pozitív definit;
- (c) 6 (nemnulla) tagot tartalmaz és negatív szemidefinit.

11.6. Feladat. Hozza kanonikus alakra a $\sum_{i=1}^n x_i^2 + \sum_{i < k} x_i x_k$ kvadratikus alakot.

11.7. Feladat. Hozza kanonikus alakra a $\sum_{i < k} x_i x_k$ kvadratikus alakot.

11.8. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha egy $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ szimmetrikus mátrixhoz tartozó kvadratikus alak pozitív definit, akkor A minden főminora pozitív.