10. feladatsor – Lineáris leképezések mátrixa, sajátértéke, sajátvektora – Eredmények

10.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Bármely két lineáris leképezésnek értelmezve van az összege.
(b) Minden lineáris leképezés rangja egyenlő az összes mátrixának rangjával.
(c) A tér $\mathbb{R}^3$ vektorterén definiált bármely két lineáris transzformáció összegének rangja legfeljebb akkora, mint az egyes tagok rangja.
(d) Minden vektortéren van olyan lineáris transzformáció, amelynek minden bázisban ugyanaz a mátrixa.
(e) A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén van olyan lineáris transzformáció, amelynek sajátértéke a 2 valós szám.
(f) A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén van olyan lineáris transzformáció, amelynek nincs sajátértéke.
(g) Hasonló mátrixok nyoma és sajátértékei megegyeznek.
(h) Minden lineáris transzformációnak diagonális a mátrixa valamely bázisban.

Eredmény. igaz: (b),(c),(d),(e),(f),(g)
hamis: (a),(h)

Tekintsük a következő bázisokat a megadott vektorterekben:

(1) $\mathbb{R}^2$; $\mathcal{E}\colon (1,0),(0,1)$, $\mathcal{F}\colon (2,-1),(-1,0)$;
(2) $\mathbb{R}^3$; $\mathcal{E}\colon (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$, $\mathcal{F}\colon (2,0,0),(0,1,1),(0,1,-1)$;
(3) $\mathbb{Z}_3^3$; $\mathcal{E}\colon (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$, $\mathcal{F}\colon (1,-1,0),(1,0,1),(1,0,0)$;
(4) $\mathbb{Z}_2^4$; $\mathcal{E}\colon (1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)$,
$\mathcal{F}\colon (1,1,0,0),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,1,0)$;
(5) $\mathbb{R}^{2\times 2}$; $\mathcal{E}\colon \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$,
$\mathcal{F}\colon \begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$;
(6) $\mathbb{Z}_2^{2\times 2}$; $\mathcal{E}\colon \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$,
$\mathcal{F}\colon \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$;
(7) a $\mathbb{Z}_3$ feletti legfeljebb másodfokú polinomok W vektortere; $\mathcal{E}\colon 1,\ x,\ x^2$,
$\mathcal{F}\colon 1-x,\ 1+x^2,\ 1$.

Tekintsük a következő lineáris transzformációkat, illetve leképezéseket:

(A) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az identikus transzformáció;
(B) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a zérustranszformáció;
(C) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a tükrözés az x-tengelyre;
(D) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a merőleges vetítés az y-tengelyre;
(E) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a $\pi/2$ szögű forgatás az origó körül;
(F) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a tükrözés az x,y-tengelyek síkjára;
(G) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a merőleges vetítés az x,y-tengelyek síkjára;
(H) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x+3y,\ 2x-y)$;

(I) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y) \mapsto (x-y,\ x+3y)$;
(J) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (2x-y,\ x+y,\ 3x-2y-z)$;
(K) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (-x+8y-2z,\ 3y-z,\ 4y-2z)$;
(L) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (-3x+5y+z,\ x+y-9z,\ -4z)$;
(M) $\varphi\colon \mathbb{Z}_3^3 \to \mathbb{Z}_3^3,\ (x,y,z) \mapsto (x+z,\ z,\ -x+y-z)$;
(N) $\varphi\colon \mathbb{Z}_3^3 \to \mathbb{Z}_3^3,\ (x,y,z) \mapsto (-x-y-z,\ x-y+z,\ -x+y-z)$;
(O) $\varphi\colon \mathbb{Z}_2^4 \to \mathbb{Z}_2^4,\ (x,y,u,v) \mapsto (u+v,\ u+v,\ x+y+u,\ x+y+v)$;
(P) $\varphi\colon \mathbb{Z}_2^4 \to \mathbb{Z}_2^4,\ (x,y,u.v) \mapsto (u+v,\ x+y+u+v,\ y,\ x+u+v)$;
(Q) $\varphi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & x \\ x-2y+u & u+2v \end{pmatrix}$;
(R) $\varphi\colon \mathbb{Z}_2^{2\times 2} \to \mathbb{Z}_2^{2\times 2},\ \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u+v & x+y+u+v \\ y & x+u+v \end{pmatrix}$;
(S) $\varphi\colon W \to W,\ a_0+a_1x+a_2x^2 \mapsto (a_0+a_2)+a_2x+(-a_0+a_1-a_2)x^2$;
(T) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a merőleges vetítés az x,y-tengelyek síkjára;
(U) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (-x+6y,\ 2z)$;
(V) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (7x-2y,\ 3x-y,\ 4x-2y)$;
(W) $\varphi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \mapsto (x+y-u,\ x+v,\ -x+y+u+v)$;
(X) $\varphi\colon \mathbb{Z}_2^4 \to \mathbb{Z}_2^{2\times 2},\ (x,y,u,v) \mapsto \begin{pmatrix} y+u & x+v \\ x+y & v \end{pmatrix}$;
(Y) $\varphi\colon W \to \mathbb{Z}_3^3,\ a_0+a_1x+a_2x^2 \mapsto (a_1-a_2,\ a_2+a_0,\ a_1-a_0)$.

10.2. Feladat. Adja meg a lineáris transzformációk, illetve leképezések következő lineáris kombinációit (ahol pl. $\varphi_{(\mathrm{A})}$ az (A)-beli lineáris leképezést jelöli):
(a) $\varphi_{(\mathrm{C})}+\psi$, ahol $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a tükrözés az y-tengelyre;
(b) $\varphi_{(\mathrm{D})}-\psi$, ahol $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a merőleges vetítés az x-tengelyre;
(c) $\varphi_{(\mathrm{F})}-2\varphi_{(\mathrm{G})}$;
(d) $\varphi_{(\mathrm{M})}+\varphi_{(\mathrm{N})}$;
(e) $\varphi_{(\mathrm{O})}+\varphi_{(\mathrm{P})}$;
(f) $3\varphi_{(\mathrm{T})}+2\varphi_{(\mathrm{U})}$;
(g) $\varphi_{(\mathrm{S})}+\varphi_{(\mathrm{Y})}$.

Eredmény. (a) $(x,y) \mapsto (0,0)$
(b) $(x,y) \mapsto (-x,y)$
(c) $(x,y,z) \mapsto (-x,-y,-z)$
(d) $(x,y,z) \mapsto (-x+y-z,-x+y,0)$
(e) $(x,y,u,v) \mapsto (0,x+y,x+u,y+u)$
(f) $(x,y,z) \mapsto (x+12y,3y+4z)$
(g) nincs értelmezve

10.3. Feladat. Határozza meg a fenti φ lineáris transzformációk, illetve leképezések mátrixát a fent megadott $\mathcal{E}$, illetve $\mathcal{F}$ bázisokban. (Pontosabban minden φ esetén két mátrixot kell megadni; ha pl. $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$, akkor $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(1)},\mathcal{E}_{(2)}}$-t és $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(1)},\mathcal{F}_{(2)}}$-t, ahol $\mathcal{E}_{(1)},\mathcal{F}_{(1)}$ az (1)-beli $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$, $\mathcal{E}_{(2)},\mathcal{F}_{(2)}$ pedig a (2)-beli $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$.) Adja meg φ rangját is.

Eredmény. (A) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(1)}} = A_\varphi^{\mathcal{F}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(B) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(1)}} = A_\varphi^{\mathcal{F}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(C) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(1)}} = \begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

(D) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

(E) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(1)}} = \begin{pmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

(F) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(2)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(2)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(G) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(2)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(2)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(H) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(1)}} = \begin{pmatrix} -5 & -9 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

(I) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$

(J) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(2)}} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(2)}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -\frac{1}{2} & -1 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(K) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(2)}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 8 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(2)}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$

(L) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(2)}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \\ 1 & -9 & -4 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(2)}} = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 3 & -6 & -2 \\ 2 & 7 & 3 \end{pmatrix}$

(M) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(3)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(3)}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(N) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(3)}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(3)}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(O) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(4)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(4)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(P) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(4)}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(4)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(Q) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(5)}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(5)}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(R) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(6)}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(6)}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(S) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(7)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(7)}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

(T) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(2)},\mathcal{E}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(2)},\mathcal{F}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ -1 & -2 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$

(U) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(2)},\mathcal{E}_{(1)}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 6 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(2)},\mathcal{F}_{(1)}} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & -10 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

(V) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(1)},\mathcal{E}_{(2)}} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(1)},\mathcal{F}_{(2)}} = \begin{pmatrix} 8 & \frac{17}{2} & -\frac{3}{2} \\ -\frac{7}{2} & -\frac{7}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(W) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(5)},\mathcal{E}_{(2)}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(5)},\mathcal{F}_{(2)}} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

(X) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(4)},\mathcal{E}_{(6)}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(4)},\mathcal{F}_{(6)}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(Y) $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(7)},\mathcal{E}_{(3)}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(7)},\mathcal{F}_{(3)}} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

10.4. Feladat. (a) Határozza meg a fenti $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisok esetén az áttérés mátrixát az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{F}$ bázisra, valamint az $\mathcal{F}$ bázisról az $\mathcal{E}$ bázisra.
(b) Adja meg az alábbi v vektorok és a fenti φ lineáris transzformációk, illetve leképezések esetén a $v\varphi$ vektor koordinátáit mindkét bázisban:

(A)–(E),(H),(I),(V): $v = (1, -3)$;
(F),(G),(J)–(L),(T),(U): $v = (2, 2, 0)$;
(M),(N): $v = (1, -1, -1)$;
(O),(P),(X): $v = (1, 1, 1, 0)$;
(Q),(W): $v = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;
(R): $v = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;
(S),(Y): $v = 1 + x + x^2$.

Eredmény. (a) Jelölje P a bázisáttérés mátrixát az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{F}$ bázisra.

(1) $P = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

(2) $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(3) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(4) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(5) $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(6) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(7) $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(b) A táblázat a v vektorok képét tartalmazza az $\mathcal{E}$ és az $\mathcal{F}$ bázisban.

	$\mathcal{E}$	$\mathcal{F}$
(A)	$(1,-3)$	$(3,5)$
(B)	$(0,0)$	$(0,0)$
(C)	$(1,3)$	$(-3,7)$
(D)	$(0,-3)$	$(3,6)$
(E)	$(3,1)$	$(-1,-5)$
(H)	$(-8,5)$	$(-5,-2)$
(I)	$(4,-8)$	$(8,12)$
(V)	$(13,6,10)$	$(\frac{13}{2},8,-2)$
(F)	$(2,2,0)$	$(1,1,1)$
(G)	$(2,2,0)$	$(1,1,1)$
(J)	$(2,4,2)$	$(1,3,1)$
(K)	$(14,6,8)$	$(7,7,-1)$
(L)	$(4,4,0)$	$(2,2,2)$
(T)	$(2,2)$	$(-2,6)$
(U)	$(10,0)$	$(0,-10)$
(M)	$(0,-1,-1)$	$(1,-1,0)$
(N)	$(1,1,-1)$	$(-1,-1,0)$
(O)	$(1,1,1,0)$	$(1,0,1,0)$
(P)	$(1,1,1,0)$	$(1,0,0,1)$
(X)	$(0,1,0,0)$	$(0,1,1,0)$
(Q)	$(0,1,2,-1)$	$(0,1,1,2)$
(W)	$(0,0,-1)$	$(0,-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$
(R)	$(0,0,1,1)$	$(0,0,1,0)$
(S)	$(-1,1,-1)$	$(-1,-1,1)$
(Y)	$(0,-1,0)$	$(1,0,-1)$

10.5. Feladat. Döntse el, hogy hasonlóak-e az alábbi mátrixok:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$;

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$;

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{2\times 2}$;

(d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$;

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 3}$;

(f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{3\times 3}$.

Eredmény. Csak a (c) és (f) feladatban megadott mátrixok hasonlók.

10.6. Feladat. Határozza meg a következő $\mathbb{R}$ ((a),(b),(d)), $\mathbb{Z}_2$ ((c),(f)) és $\mathbb{Z}_3$ ((c),(e)) feletti mátrixok karakterisztikus polinomját és sajátértékeit, valamint adjon meg bázist a sajátalterekben.

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};\quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};\quad \text{(c)}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{(d)}\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix};\quad \text{(e)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix};\quad \text{(f)}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Eredmény. Az első sor a karakterisztikus polinomot, a további sorok pedig egy-egy sajátértékhez tartozó sajátalteret adnak meg.

(a) $x^2 - 3x$
   $x = 0$: $[(1,1)]$
   $x = 3$: $[(2,-1)]$
(b) $x^2 - 2x + 3$: nincs valós sajátérték
(c) $\mathbb{Z}_2$ esetben $x^2 + x + 1$, míg $\mathbb{Z}_3$ esetben $x^2 - x - 1$ a karakterisztikus polinom. Egyik esetben sincs sajátérték-sajátvektor pár.
(d) $(x-3)^2(x+1)$
   $x = 3$: $[(1,0,-1),(0,1,-1)]$
   $x = -1$: $[0,1,-5)]$
(e) $-x(x^2+1)$
   $x = 0$: $[(1,0,-1)]$
(f) $x(x+1)(x^2+x+1)$
   $x = 0$: $[(1,0,0,1)]$
   $x = 1$: $[(0,1,1,1)]$

10.7. Feladat. Határozza meg a fenti lineáris transzformációk ((A)–(S)) sajátértékeit, és adjon meg bázist a sajátalterekben.

Eredmény. Minden sor egy-egy sajátértéket és a hozzá tartozó sajátalteret tartalmazza.

(A) $x = 1$: $[(1, 0), (0, 1)]$
(B) $x = 0$: $[(1, 0), (0, 1)]$
(C) $x = 1$: $[(1, 0)]$
$x = -1$: $[(0, 1)]$
(D) $x = 0$: $[(1, 0)]$
$x = 1$: $[(0, 1)]$
(E) nincs sajátérték-sajátvektor pár
(F) $x = 1$: $[(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$
$x = -1$: $[(0, 0, 1)]$
(G) $x = 1$: $[(1, 0, 0), (0, 1, 0)]$
$x = 0$: $[(0, 0, 1)]$
(H) $x = \sqrt{7}$: $[(1 + \sqrt{7}, 2)]$
$x = -\sqrt{7}$: $[(1 - \sqrt{7}, 2)]$
(I) $x = 2$: $[(1, -1)]$
(J) $x = -1$: $[(0, 0, 1)]$
(K) $x = -1$: $[(1, 0, 0), (0, 1, 4)]$
$x = 2$: $[(2, 1, 1)]$
(L) $x = 2$: $[(1, 1, 0)]$
$x = -4$: $[(-5, 1, 0)]$
(M) nincs sajátérték-sajátvektor pár
(N) $x = 0$: $[(1, 0, -1)]$
$x = 1$: $[(0, 1, -1)]$
$x = -1$: $[(-1, 1, -1)]$
(O) $x = 0$: $[(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 1)]$
$x = 1$: $[(1, 1, 1, 0), (1, 1, 0, 1)]$
(P) $x = 0$: $[(0, 0, 1, 1)]$
$x = 1$: $[(1, 1, , 1, 0)]$
(Q) $x = 1$: $[(0, 0, 0, 1)]$
$x = 1$: $x = 0$: $[(0, 1, 2, -2)]$
(R) $x = 0$: $[(0, 0, 1, 1)]$
$x = 1$: $[(1, 1, , 1, 0)]$
(S) nincs sajátérték-sajátvektor pár