10. feladatsor – Lineáris leképezések mátrixa, sajátértéke, sajátvektora

10.1. Feladat. Döntse el, hogy igazak-e az alábbi állítások, és döntését röviden indokolja:

(a) Bármely két lineáris leképezésnek értelmezve van az összege.
(b) Minden lineáris leképezés rangja egyenlő az összes mátrixának rangjával.
(c) A tér $\mathbb{R}^3$ vektorterén definiált bármely két lineáris transzformáció összegének rangja legfeljebb akkora, mint az egyes tagok rangja.
(d) Minden vektortéren van olyan lineáris transzformáció, amelynek minden bázisban ugyanaz a mátrixa.
(e) A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén van olyan lineáris transzformáció, amelynek sajátértéke a 2 valós szám.
(f) A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén van olyan lineáris transzformáció, amelynek nincs sajátértéke.
(g) Hasonló mátrixok nyoma és sajátértékei megegyeznek.
(h) Minden lineáris transzformációnak diagonális a mátrixa valamely bázisban.

Tekintsük a következő bázisokat a megadott vektorterekben:

(1) $\mathbb{R}^2$; $\mathcal{E}\colon (1,0),(0,1)$, $\mathcal{F}\colon (2,-1),(-1,0)$;
(2) $\mathbb{R}^3$; $\mathcal{E}\colon (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$, $\mathcal{F}\colon (2,0,0),(0,1,1),(0,1,-1)$;
(3) $\mathbb{Z}_3^3$; $\mathcal{E}\colon (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)$, $\mathcal{F}\colon (1,-1,0),(1,0,1),(1,0,0)$;
(4) $\mathbb{Z}_2^4$; $\mathcal{E}\colon (1,0,0,0),(0,1,0,0),(0,0,1,0),(0,0,0,1)$,
$\mathcal{F}\colon (1,1,0,0),(0,1,1,1),(0,0,1,1),(0,0,1,0)$;
(5) $\mathbb{R}^{2\times 2}$; $\mathcal{E}\colon \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$,
$\mathcal{F}\colon \begin{pmatrix}1&1\\0&-1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\-1&-2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$;
(6) $\mathbb{Z}_2^{2\times 2}$; $\mathcal{E}\colon \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$,
$\mathcal{F}\colon \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$;
(7) a $\mathbb{Z}_3$ feletti legfeljebb másodfokú polinomok W vektortere; $\mathcal{E}\colon 1,\ x,\ x^2$, $\mathcal{F}\colon 1-x,\ 1+x^2,\ 1$.

Tekintsük a következő lineáris transzformációkat, illetve leképezéseket:

(A) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ az identikus transzformáció;
(B) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a zérustranszformáció;
(C) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a tükrözés az x-tengelyre;
(D) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a merőleges vetítés az y-tengelyre;
(E) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a $\pi/2$ szögű forgatás az origó körül;
(F) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a tükrözés az x,y-tengelyek síkjára;
(G) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a merőleges vetítés az x,y-tengelyek síkjára;
(H) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x+3y,\ 2x-y)$;
(I) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x,y) \mapsto (x-y,\ x+3y)$;
(J) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (2x-y,\ x+y,\ 3x-2y-z)$;
(K) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $(x,y,z) \mapsto (-x+8y-2z,\ 3y-z,\ 4y-2z)$;

(L) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y,z) \mapsto (-3x+5y+z,\ x+y-9z,\ -4z)$;
(M) $\varphi\colon \mathbb{Z}_3^3 \to \mathbb{Z}_3^3,\ (x,y,z) \mapsto (x+z,\ z,\ -x+y-z)$;
(N) $\varphi\colon \mathbb{Z}_3^3 \to \mathbb{Z}_3^3,\ (x,y,z) \mapsto (-x-y-z,\ x-y+z,\ -x+y-z)$;
(O) $\varphi\colon \mathbb{Z}_2^4 \to \mathbb{Z}_2^4,\ (x,y,u,v) \mapsto (u+v,\ u+v,\ x+y+u,\ x+y+v)$;
(P) $\varphi\colon \mathbb{Z}_2^4 \to \mathbb{Z}_2^4,\ (x,y,u.v) \mapsto (u+v,\ x+y+u+v,\ y,\ x+u+v)$;
(Q) $\varphi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^{2\times 2},\ \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 & x \\ x-2y+u & u+2v \end{pmatrix}$;
(R) $\varphi\colon \mathbb{Z}_2^{2\times 2} \to \mathbb{Z}_2^{2\times 2},\ \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} u+v & x+y+u+v \\ y & x+u+v \end{pmatrix}$;
(S) $\varphi\colon W \to W,\ a_0+a_1x+a_2x^2 \mapsto (a_0+a_2)+a_2x+(-a_0+a_1-a_2)x^2$;
(T) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ a merőleges vetítés az x,y-tengelyek síkjára;
(U) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x,y,z) \mapsto (-x+6y,\ 2z)$;
(V) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x,y) \mapsto (7x-2y,\ 3x-y,\ 4x-2y)$;
(W) $\varphi\colon \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}^3,\ \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} \mapsto (x+y-u,\ x+v,\ -x+y+u+v)$;
(X) $\varphi\colon \mathbb{Z}_2^4 \to \mathbb{Z}_2^{2\times 2},\ (x,y,u,v) \mapsto \begin{pmatrix} y+u & x+v \\ x+y & v \end{pmatrix}$;
(Y) $\varphi\colon W \to \mathbb{Z}_3^3,\ a_0+a_1x+a_2x^2 \mapsto (a_1-a_2,\ a_2+a_0,\ a_1-a_0)$.

10.2. Feladat. Adja meg a lineáris transzformációk, illetve leképezések következő lineáris kombinációit (ahol pl. $\varphi_{(A)}$ az (A)-beli lineáris leképezést jelöli):

(a) $\varphi_{(C)}+\psi$, ahol $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a tükrözés az y-tengelyre;
(b) $\varphi_{(D)}-\psi$, ahol $\psi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a merőleges vetítés az x-tengelyre;
(c) $\varphi_{(F)}-2\varphi_{(G)}$;
(d) $\varphi_{(M)}+\varphi_{(N)}$;
(e) $\varphi_{(O)}+\varphi_{(P)}$;
(f) $3\varphi_{(T)}+2\varphi_{(U)}$;
(g) $\varphi_{(S)}+\varphi_{(Y)}$.

10.3. Feladat. Határozza meg a fenti φ lineáris transzformációk, illetve leképezések mátrixát a fent megadott $\mathcal{E}$, illetve $\mathcal{F}$ bázisokban. (Pontosabban minden φ esetén két mátrixot kell megadni; ha pl. $\varphi \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^3)$, akkor $A_\varphi^{\mathcal{E}_{(1)},\mathcal{E}_{(2)}}$-t és $A_\varphi^{\mathcal{F}_{(1)},\mathcal{F}_{(2)}}$-t, ahol $\mathcal{E}_{(1)},\mathcal{F}_{(1)}$ az (1)-beli $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$, $\mathcal{E}_{(2)},\mathcal{F}_{(2)}$ pedig a (2)-beli $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$.) Adja meg φ rangját is.

10.4. Feladat. (a) Határozza meg a fenti $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisok esetén az áttérés mátrixát az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{F}$ bázisra, valamint az $\mathcal{F}$ bázisról az $\mathcal{E}$ bázisra.
(b) Adja meg az alábbi v vektorok és a fenti φ lineáris transzformációk, illetve leképezések esetén a $v\varphi$ vektor koordinátáit mindkét bázisban:

(A)–(E),(H),(I),(V): $v=(1,-3)$;
(F),(G),(J)–(L),(T),(U): $v=(2,2,0)$;
(M),(N): $v=(1,-1,-1)$;
(O),(P),(X): $v=(1,1,1,0)$;
(Q),(W): $v=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$;
(R): $v=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

(S),(Y): $\quad v = 1 + x + x^2$.

10.5. Feladat. Döntse el, hogy hasonlóak-e az alábbi mátrixok:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$;

(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{2\times 2}$;

(c) $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{2\times 2}$;

(d) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$;

(e) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_3^{3\times 3}$;

(f) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Z}_2^{3\times 3}$.

10.6. Feladat. Határozza meg a következő $\mathbb{R}$ ((a),(b),(d)), $\mathbb{Z}_2$ ((c),(f)) és $\mathbb{Z}_3$ ((c),(e)) feletti mátrixok karakterisztikus polinomját és sajátértékeit, valamint adjon meg bázist a sajátalterekben.

$$\text{(a)}\ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)}\ \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \text{(c)}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{(d)}\ \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}; \quad \text{(e)}\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}; \quad \text{(f)}\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10.7. Feladat. Határozza meg a fenti lineáris transzformációk ((A)–(S)) sajátértékeit, és adjon meg bázist a sajátalterekben.

Szorgalmi feladatok

10.8. Feladat. Tetszőleges T test felett adjon meg n különböző izomorfizmust a T^n vektortér és a T feletti legfeljebb $(n-1)$-edfokú polinomok vektortere között.

10.9. Feladat. Adottak a V vektortérben az U és W alterek. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy létezzék olyan φ lineáris transzformáció, amelyre $\operatorname{Ker}\varphi = U$ és $\operatorname{Im}\varphi = W$?

10.10. Feladat. Mutassa meg, hogy tetszőleges n-dimenziós vektortérben

(a) az identikus transzformáció mátrixa minden bázisban az $n\times n$-es egységmátrix;

(b) a zérus transzformáció mátrixa minden bázisban az $n\times n$-es zérusmátrix.

10.11. Feladat. Határozza meg a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterének összes olyan lineáris transzformációját, amelynek minden bázisban ugyanaz a mátrixa.

10.12. Feladat. Adja meg a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén az összes olyan lineáris transzformációt, amelynek $4 \in \mathbb{R}$ sajátértéke, és a 4-hez tartozó sajátaltér kétdimenziós.

10.13. Feladat. Adja meg az a valós paraméter azon értékeit, melyekre $2 \in \mathbb{R}$ nem sajátértéke a mátrixnak:

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & a \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

10.14. Feladat. Az a valós paraméter mely értékei esetén lesz az

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & a \end{pmatrix}$$

mátrixnak sajátvektora az $(1, -1, a)$ vektor?

10.15. Feladat. Tetszőleges $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mátrix esetén tekintsük a következő adatokat:

(1) A determinánsa és nyoma;
(2) A sajátértékei;
(3) A karakterisztikus polinomja.

Mi a kapcsolat a közöttük? (Pl. (1) ismeretében megkaphatjuk-e, és ha igen, hogyan, a (2)-beli és a (3)-beli adatokat?)