

9. feladatsor – Lineáris leképezések

9.1. Feladat. Melyek lineárisak az alábbi leképezések közül? Amelyik lineáris, annak határozzuk meg a képterét és a magterét, illetve ezek dimenzióját, bázisát.

- a) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y, xy)$;
- b) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y, z) \mapsto (x - y, x + y)$;
- c) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x - 2y, -2x + 4y, -4x + 8y)$;
- d) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (x - y, y + 1, x + z)$.

9.2. Feladat. A sík \mathbb{R}^2 vektorterében tekintsük a következő transzformációkat. Döntsük el, hogy lineáris transzformációk-e. Ha igen, akkor adjuk meg a magjukat, képterüket és azok dimenzióját, bázisát.

- a) eltolás az $(1, 1)$ vektorral;
- b) tükrözés az x tengelyre;
- c) merőleges vetítés az y tengelyre;
- d) $\pi/2$ szögű forgatás az origó körül;
- e) tükrözés az $y = x$ egyenesre.

9.3. Feladat. Tekintsük a sík \mathbb{R}^2 vektorterén értelmezett alábbi φ és ψ lineáris transzformációkat. Határozzuk meg a $\varphi + \psi$ és a $\varphi\psi$ lineáris transzformációkat.

- a) φ az x -tengelyre, ψ az y -tengelyre vonatkozó tükrözés;
- b) φ az x -tengelyre, ψ az y -tengelyre vonatkozó merőleges vetítés;
- c) φ az identikus transzformáció, ψ az origó körüli $\pi/2$ szögű forgatás;
- d) φ az origó körüli $\pi/3$ szögű, ψ az origó körüli $-\pi/3$ szögű forgatás.

9.4. Feladat. Határozzuk meg az alábbi \mathcal{E} illetve \mathcal{F} bázisok esetén az \mathcal{E} bázisról az \mathcal{F} bázisra való bázisátterés mátrixát, valamint az \mathcal{F} -ről \mathcal{E} -re való bázisátterés mátrixát.

- a) $\mathcal{E}: (1, 0), (0, 1)$, $\mathcal{F}: (2, -1), (-1, 0)$;
- b) $\mathcal{E}: (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$, $\mathcal{F}: (2, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, -1)$.

9.5. Feladat. Határozzuk meg a következő φ lineáris transzformációk mátrixát az előző feladatban szereplő megfelelő \mathcal{E} , illetve \mathcal{F} bázisokban. Számítsuk ki a v vektor φ melletti képének koordinátáit mindkét bázisban.

- a) $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + 3y, 2x - y)$, $v = (1, -3)$;
- b) $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto (2x - y, x + y, 3x - 2y - z)$, $v = (2, 2, 0)$.

Szorgalmi feladatok

9.6. Feladat. Legyen V a legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomok vektortere. Döntsük el, hogy V megadott transzformációi lineárisak-e. Ha igen, akkor adjuk meg a lineáris transzformáció magját, képterét és azok dimenzióját. ($f = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, ahol $a_i \in \mathbb{R}$.)

- a) $f \mapsto f'$ (f deriváltja);
- b) $f \mapsto a_0x$;
- c) $f \mapsto f$ maradéka $x^2 + x + 2$ -vel osztva.

9.7. Feladat. Létezik-e a sík \mathbb{R}^2 vektorterén értelmezett olyan φ lineáris transzformáció, amely teljesülnek a következő tulajdonságok? Ha létezik, akkor adjunk is meg egy-egy ilyen transzformációt.

- a) $\text{Ker}\varphi \cap \text{Im}\varphi = \emptyset$;
- b) $\text{Ker}\varphi \cap \text{Im}\varphi = \{\mathbf{0}\}$;
- c) $\text{Ker}\varphi \subset \text{Im}\varphi$;
- d) $\text{Im}\varphi \subset \text{Ker}\varphi$;
- e) $\text{Ker}\varphi = \text{Im}\varphi$.

9.8. Feladat. Tekintsük \mathbb{R}^2 -ben az $U = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}\}$ és a $W = \{(x, -x) : x \in \mathbb{R}\}$ altereket. Adjunk meg olyan φ lineáris transzformációt, amelyre $\text{Ker}\varphi = U$ és $\text{Im}\varphi = W$. Adjunk meg olyan ψ lineáris transzformációt is, amelyre $\text{Ker}\psi = W$ és $\text{Im}\psi = U$.

9.9. Feladat. Adottak a V vektortérben az U és W alterek. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy létezzék olyan φ lineáris transzformáció, amelyre $\text{Ker}\varphi = U$ és $\text{Im}\varphi = W$?

9.10. Feladat. Mennyi lehet egy $\varphi: \mathbb{R}^9 \rightarrow \mathbb{R}^5$ lineáris leképezés magjának dimenziója? Adjunk meg egy-egy példát a legkisebb és a legnagyobb értékre.

9.11. Feladat. A $\varphi \in \text{Hom}(U, V)$ lineáris leképezésről tudjuk, hogy

- (1) bármely négy elem képe lineárisan függő vektorrendszert alkot;
- (2) bármely hat lineárisan független U -beli elem között van olyan, amelynek képe nem a zéróvektor.

Mekkora lehet U dimenziója?

9.12. Feladat. Mutassa meg, hogy tetszőleges n -dimenziós vektortérben

- a) az identikus transzformáció mátrixa minden bázisban az $n \times n$ -es egységmátrix;
- b) a zérus transzformáció mátrixa minden bázisban az $n \times n$ -es zérusmátrix.

9.13. Feladat. Adjunk meg egy izmorfizmust a valós szám n -esek \mathbb{R}^n vektortere és a legfeljebb $(n - 1)$ -ed fokú valós együtthatós polinomok vektortere között.