6. feladatsor – Lineáris függetlenség

6.1. Feladat. Döntsük el, hogy lineárisan független vektorrendszert alkotnak-e az alábbi vektorok a V vektortérben.

a) $V = \mathbb{R}^3$; $\quad v_1 = (1,\ 2,\ 1), v_2 = (1,\ -1,\ 1), v_3 = (1,\ 1,\ 0)$;
b) $V = \mathbb{R}^3$; $\quad v_1 = (1,\ -2,\ 4),\ v_2 = (2,\ -3,\ 1),\ v_3 = (-4,\ 5,\ 5)$;
c) $V = \mathbb{R}^4$; $\quad v_1 = (1,\ -2,\ 3,\ 4),\ v_2 = (0,\ -3,\ 1,\ 2),\ v_3 = (2\ -4,\ 5,\ 9)$;
d) $V = \mathbb{R}^5$; $\quad v_1 = (1,-2,0,3,1),\ v_2 = (0,0,2,4,-2),\ v_3 = (3,0,0,-3,-3)$, $v_4 = (-1,-1,2,4,1)$.

6.2. Feladat. Az x valós paraméter mely értékeire alkotnak a V vektortérben az alábbi vektorok lineársian függő, illetve lineárisan független vektorrendszert.

a) $V = \mathbb{R}^4$; $\quad v_1 = (1,-4,3,2),\ v_2 = (-1,4,-2,-4),\ v_3 = (3-12,x,10)$;
b) $V = \mathbb{R}^5$; $\quad v_1 = (-1,\ -3,\ 2,\ 1,\ -1),\ v_2 = (-2,\ -8,\ 7,\ 3,\ -1),\ v_3 = (1,\ 9\ -11,\ -4,\ x)$.

6.3. Feladat. Legyenek u, v és w lineárisan független vektorok valamely vektortérben. Mit mondhatunk az alábbi vektorok lineáris függetlenségéről?

a) $u + v,\ u - v,\ u - 2v + w$;
b) $u + 2v,\ u + 2w,\ -2v + w$;
c) $u + 3v + 2w,\ 2u + w,\ u + v + w$.

Szorgalmi feladatok

6.4. Feladat. Legyen $v_1, v_2, \dots, v_k$ tetszőleges vektorrendszer a V vektortérben. Döntsük el, hogy igazak-e a következő állítások:

a) Ha $v_1, v_2, \dots, v_k$ generátorrendszer V-ben, akkor $v_1, v_2, \dots, v_k$ lineárisan független vektorrendszer.
b) Ha $v_1, v_2, \dots, v_k$ lineárisan független vektorrendszer, akkor $v_1, v_2, \dots, v_k$ generátorrendszer V-ben.
c) Ha $v_1, v_2, \dots, v_k$ lineárisan függő vektorrendszer, akkor van olyan i, hogy v_i előáll a $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k$ vektorrendszer lineáris kombinációjaként.
d) Ha $v_1, v_2, \dots, v_k$ lineárisan függő vektorrendszer, akkor bármely i-re v_i előáll a $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k$ vektorrendszer lineáris kombinációjaként.
e) A $v_1, v_2, \dots, v_k$ vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha minden i-re $[v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_k] \neq [v_1, v_2, \dots, v_k]$.

6.5. Feladat. Legyen $u_1, u_2, \dots, u_k$ és $v_1, v_2, \dots, v_k$ két tetszőleges vektorrendszer a V vektortérben. Döntsük el, hogy igazak-e a következő állítások:

a) Ha $u_1, u_2, \dots, u_k$ és $v_1, v_2, \dots, v_k$ lineárisan független, akkor az $u_1 + v_1$, $u_2 + v_2, \dots, u_k + v_k$ vektorrendszer is az.
b) Ha $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_k, v_k$ lineárisan független vektorrendszer, akkor $u_1, u_2, \dots, u_k$ és $v_1, v_2, \dots, v_k$ is az.
c) Ha $u_1, v_1, u_2, v_2, \dots, u_k, v_k$ lineárisan függő vektorrendszer, akkor u_1, $u_2, \dots, u_k$ és $v_1, v_2, \dots, v_k$ is az.
d) Ha $v_1, v_2, \dots, v_k$ lineárisan független, akkor a $v_1 + v_2, v_1 + v_2 + v_3, \dots$, $v_1 + v_2 + \ldots + v_k$ vektorrendszer is az.

6.6. Feladat. Lineárisan függetlenek-e a következő vektorrendszerek a valós függvények vektorterében?

a) $1,\ \sin^2 x,\ \cos^2 x$;

b) $1,\ \sin x,\ \cos x$.

6.7. Feladat. Lineárisan független-e a $\{\log p : p \text{ prímszám}\}$ halmaz a valós számok $\mathbb{Q}$ feletti vektorterében?

6.8. Feladat. Legyen $v_1, v_2, \ldots, v_k$ olyan vektorrendszer, amelyben pontosan egy olyan vektor van, amely előáll a többi vektor lineáris kombinációjaként. Igazolja, hogy ez a vektor a nullvektor.

6.9. Feladat. A v_1, v_2, v_3, v_4 vektorrendszerről a következőket tudjuk: a v_1, v_2, v_3 részrendszer lineárisan független, de az összes többi háromtagú részrendszer lineárisan függő. Meghatározza-e ez egyértelműen a v_4 vektort?