5. feladatsor – Vektorterek

5.1. Feladat. Állapítsuk meg, hogy az alábbi U részhalmazok közül melyek alterek az $\mathbb{R}^3$ vektortérben.

a) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0, \text{ vagy } x_2 = 0\}$;
b) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 = 0, \text{ és } x_2 = 0\}$;
c) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 + 2x_2 - x_3 = 0\}$;
d) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 1, x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$;
e) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : 3x_1x_2 + x_3 = 0\}$;
f) $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1^2 + x_3^2 = 0\}$.

5.2. Feladat. Döntsük el, hogy a v vektor eleme-e az U altérnek.

a) $v = (1, -1, 1),\ U = [(1, -1, 0), (0, 0, 1)]$;
b) $v = (1, 1, 1),\ U = [(1, -1, 2), (1, 0, 1)]$;
c) $v = (1, 2, 1),\ U = [(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)]$;
d) $v = (1, 2, 1),\ U = [(1, 1, 1), (1, 0, -1), (2, 1, 0)]$.

5.3. Feladat. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^3$ vektortér $(1, 1, 1)$ és $(1, -1, 5)$ vektorok által kifeszített alterét, azaz adjuk meg, hogy milyen összefüggésnek kell teljesülnie az x_1, x_2, x_3 számokra, hogy az (x_1, x_2, x_3) vektor benne legyen ebben az altérben.

Szorgalmi feladatok

5.4. Feladat. Igazoljuk, hogy a pozitív valós számok halmaza vektorteret alkot a valós számok teste felett, ha az „összeadást” és a „skalárral való szorzást” a következőképpen definiáljuk:

$$u \oplus v = uv, \quad \lambda \odot v = v^{\lambda}.$$

5.5. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely halmaz hatványhalmaza vektorteret alkot $\mathbb{Z}_2$ felett, ha „összeadásnak” a szimmetrikus differencia képzését tekintjük. (A skalárral való szorzást miért nem kell külön definiálni?)

5.6. Feladat. Alteret alkotnak-e az $\mathbb{R}^{n\times n}$ vektortérben az alábbi halmazok?

a) $U = \{A : |A| = 0\}$;
b) $U = \{A : |A| \neq 0\}$;
c) $U = \{A : A^T = A\}$;
d) $U = \{A : AB = BA\}$, ahol B egy adott mátrix.

5.7. Feladat. Igazoljuk, hogy egy vektortér soha nem állhat elő két valódi alterének uniójaként.

5.8. Feladat. Igazoljuk, hogy $n \geq 2$ esetén a $\mathbb{Z}_2^n$ vektortér előáll három valódi alterének uniójaként.

5.9. Feladat. Legyen u, v, w három vektor egy tetszőleges vektortérben. Mit lehet mondani az u vektorról, ha tudjuk, hogy $w \notin [u, v]$, $v \notin [u, w]$, de $u \in [v, w]$?

5.10. Feladat. Döntsük el, hogy a p polinom eleme-e az U altérnek a valós együtthatós polinomok vektorterében.

a) $p = x^2 - x + 1,\ U = [x^2 + 1,\ 2x + 1,\ -x^2 + x]$;
b) $p = -x^2 - x + 2,\ U = [x^2 - 1,\ x^2 - x - 2,\ x^2 - 2x - 3]$.

5.11. Feladat. Legyen $U = [(1, 2, 1), (-1, 1, 1)], V = [(0, 3, 2), (-2, -1, 0)]$ két altere az $\mathbf{R}^3$ vektortérnek. Igaz-e, hogy $U = V$?

5.12. Feladat. Legyen $U = \{(x_1, x_2, x_3) : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}, V = [(1, 2, 1)]$. Igaz-e, hogy $U = V$?

5.13. Feladat. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges vektortér tetszőleges U, V, W altereire

$$U \subseteq W \implies (U + V) \cap W = (U \cap W) + (V \cap W)\,.$$

5.14. Feladat. Legyen $V = \mathbb{R}^n, U = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) : a_1 + 2 \cdot a_2 + \cdots + n \cdot a_n = 0\}$ és $Y = \{(a, a, \dots, a) : a \in \mathbb{R}\}$. Mutassuk meg, hogy
a) $X \cap Y = \{\underline{0}\}$;
b) $X + Y = \mathbb{R}^n$.