4. feladatsor – Lineáris egyenletrendszerek

4.1. Feladat. Oldjuk meg Gauss elimináció segítségével az alábbi lineáris egyenletrendszereket. Ha lehetséges, Cramer-szabállyal is oldjuk meg.

a)
$$\begin{array}{rcrcrcr} x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -9 \\ x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & = & 2 \\ 3x_1 & - & 6x_2 & - & x_3 & = & 25 \end{array};$$

b)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 4x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & = & 6 \\ x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ 7x_1 & + & 7x_2 & + & 8x_3 & = & 10 \end{array};$$

c)
$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & - & 4x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 6x_2 & - & 7x_3 & + & x_4 & = & 6 \\ -3x_1 & - & 9x_2 & + & 10x_3 & - & x_4 & = & -11 \end{array};$$

d)
$$\begin{array}{rcrcrcr} 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 2 \\ x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & = & 5 \\ x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -7 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & - & 3x_3 & = & 14 \end{array}.$$

4.2. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert $a = 23$, illetve $a = 24$ esetén.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 7 \\ 3x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & -2 \\ & & x_2 & + & 2x_3 & + & 2x_4 & = & a \end{array}$$

Szorgalmi feladatok

4.3. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ahol a, b, c valós paraméterek.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & a \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & b \\ x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & = & c \end{array}$$

4.4. Feladat. Oldjuk meg (az a paraméter függvényében) az alábbi lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{array}{rcl} x_1 - x_2 + x_3 + ax_4 & = & 1 \\ x_1 + (1-a)x_3 + (a-1)x_4 & = & 2 \\ x_1 - ax_3 + (a-2)x_4 & = & 1 \\ -ax_1 + ax_2 + 2ax_3 + 2x_4 & = & 3a - 1 \end{array}$$

4.5. Feladat. Oldjuk meg (az a paraméter függvényében) az alábbi lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{array}{llrcl} x_1 & -2x_2 & +x_3 & = & 1 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & = & 3 \\ x_1 & -2x_2 & +(a^2-8)x_3 & = & a+4 \end{array}$$

4.6. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ahol a valós paraméter.

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & ax_3 & = & 3 \\ x_1 & + & ax_2 & + & 3x_3 & = & 2 \end{array}$$

4.7. Feladat. Létezik-e olyan m egyenletből álló n ismeretlenes valós egyenletrendszer, melyre

a) $n > m$ és nincs megoldás;
b) $m > n$ és pontosan egy megoldás van;
c) $m > n$ és nincs megoldás;
d) $n = m$ és végtelen sok megoldás van;

4.8. Feladat. Keressük meg a következő lineáris egyenletrendszer általános megoldását.

$$\begin{array}{rcrcccrcl} x_1 & + & x_2 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ a_1x_1 & + & a_2x_2 & + & \dots & + & a_nx_n & = & b \\ a_1^2x_1 & + & a_2^2x_2 & + & \dots & + & a_n^2x_n & = & b^2 \\ & & & & & & & \vdots & \\ a_1^{n-1}x_1 & + & a_2^{n-1}x_2 & + & \dots & + & a_n^{n-1}x_n & = & b^{n-1} \end{array}$$

($a_1, a_2, \dots, a_n$ páronként különböző valós számok)

4.9. Feladat. Keressük meg a következő lineáris egyenletrendszer általános megoldását.

$$\begin{array}{rcrcrcccrcl} ax_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & ax_2 & + & x_3 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ x_1 & + & x_2 & + & ax_3 & + & \dots & + & x_n & = & 1 \\ & & & & & & & & & \vdots & \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & \dots & + & ax_n & = & 1 \end{array}$$

(a tetszőleges valós szám)

4.10. Feladat. Egyszer volt, hol nem volt, volt egyszer hét kicsi kecske. A mamájuk hozott nekik $2,1$ liter tejecskét, és szétosztotta a hét kicsi bögrécskébe, de nem sikerült igazságosan elosztania. Az első kicsi kecske így szólt: – Én annyira szeretem a testvérkéimet, hogy inkább lemondok a tejecskémről a javukra. – Azzal egyenlően szét is osztotta a tejecskéjét a hat testvérkéje között. A második kicsi kecske is nagyon jószívű volt, ő is szétosztotta a bögrécskéjében lévő tejcskét hat testvérkéje között. Így tett sorban a többi kicsi kecske is. És – lássatok csudát! – a végén minden kicsi bögrécskében ugyanannyi tejecske volt, mint a legelején. Azaz mennyi?