3. feladatsor – Mátrix inverze

3.1. Feladat. Adjuk meg a következő mátrixok inverzét.

$$\textbf{a)} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 8 \end{pmatrix} \quad \textbf{b)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \\ -2 & -2 & 11 \end{pmatrix} \quad \textbf{c)} \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 4 \\ 2 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

3.2. Feladat. Oldjuk meg a következő mátrixegyenleteket.

a) $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 10 & 1 \end{pmatrix};$

b) $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 6 \\ 5 & 5 \end{pmatrix};$

c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 7 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 10 & 1 \\ 29 & 5 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}.$

3.3. Feladat. Gauss–Jordan-elimináció (elemi sorátalakítások) segítségével számítsuk ki a következő mátrix inverzét.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Szorgalmi feladatok

3.4. Feladat. Adjunk meg olyan $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixot, mely nem diagonális, és inverze önmaga, azaz melyre $A^{-1} = A$.

3.5. Feladat. Számítsuk ki az alábbi $n \times n$-es mátrix inverzét.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & n-1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

3.6. Feladat. Oldja meg az $AX^{-1}B - C = AX^{-1}$ mátrixegyenletet, ahol A, B, C az alábbi mátrixok.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 3 & -3 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

3.7. Feladat. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ esetén
$AB + A + B = \underline{0} \implies AB = BA.$