

2. feladatsor – Determinánsok

2.1. Feladat. Határozzuk meg a következő determinánsokat.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad \text{b) } \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \text{c) } \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

2.2. Feladat. Határozzuk meg az $\underline{a} = (1, 2, -3)$, $\underline{b} = (2, 1, -4)$ és $\underline{c} = (1, 0, 3)$ helyvektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát.

2.3. Feladat. Adjuk meg az x értékét úgy, hogy teljesüljön az alábbi egyenlőség.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = 8.$$

2.4. Feladat. Határozzuk meg x^3 együtthatóját az alábbi determinánsban.

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$$

2.5. Feladat. Számítsuk ki a következő determinánst.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 4 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 12 & 6 & 12 & 24 & 48 \\ 4 & -3 & 9 & -27 & 81 \end{vmatrix}$$

2.6. Feladat. Számítsuk ki a következő $n \times n$ -es determinánst.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Szorgalmi feladatok

2.7. Feladat. Legyen $a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & \text{ha } i \neq j; \\ 2, & \text{ha } i = j. \end{cases}$

Számítsuk ki az $A = (a_{ij})_{n \times n}$ mátrix determinánsát.

2.8. Feladat. Tekintsük a síkban azt a paralelogrammát, amelynek egyik csúcsa az origó, a vele szomszédos két csúcs koordinátái (a, b) és (c, d) . Igazolja, hogy a paralelogramma területe az $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ determináns abszolút értéke.

2.9. Feladat. Ha olyan nemnulla determinánsú $n \times n$ -es mátrixot akarunk felírni, amelyben minden elem nulla vagy egy, akkor legalább hány egyest kell felhasználnunk? És mennyi a nullák számának minimuma?

A következő feladatokban a determinánsok értékét kell kiszámolni, ha nem derül ki a determináns rendje, akkor n -ed rendűnek kell tekinteni.

2.10. Feladat.

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$$

2.11. Feladat.

$$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

2.12. Feladat.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

2.13. Feladat.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

2.14. Feladat. Számítsuk ki a következő determináns, a determináns kifejtése nélkül.

$$\begin{vmatrix} \alpha^2 & (\alpha+1)^2 & (\alpha+2)^2 & (\alpha+3)^2 \\ \beta^2 & (\beta+1)^2 & (\beta+2)^2 & (\beta+3)^2 \\ \gamma^2 & (\gamma+1)^2 & (\gamma+2)^2 & (\gamma+3)^2 \\ \delta^2 & (\delta+1)^2 & (\delta+2)^2 & (\delta+3)^2 \end{vmatrix}$$

2.15. Feladat. A determinánsok kifejtése nélkül igazoljuk, hogy

$$\begin{vmatrix} b_1 + c_1 & c_1 + a_1 & a_1 + b_1 \\ b_2 + c_2 & c_2 + a_2 & a_2 + b_2 \\ b_3 + c_3 & c_3 + a_3 & a_3 + b_3 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

2.16. Feladat. Egy A mátrixot *ferdén szimmetrikusnak* nevezünk, ha $A^T = -A$. Bizonyítsuk be, hogy ha n páratlan, akkor bármely ferdén szimmetrikus $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix determinánsa 0.