1. feladatsor – Mátrixok

1.1. Feladat.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki a következő mátrixokat: $A+B$, $3A$, B^T, BC, AC.

1.2. Feladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki az alábbi mátrixokat (amennyiben léteznek).

$$AB, BA, CB, BC, DC, CD, EB^T, BF, E^TA,$$
$$F^2, D^TC^T, (A+B)C, (A+B^T)D, AD+B^TD$$

1.3. Feladat. Számítsuk ki az $f(x) = x^2+3x-4$ polinom helyettesítési értékét az A helyen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.4. Feladat. Adjuk meg az összes olyan mátrixot, amely A-val felcserélhető!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1.5. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

1.6. Feladat. Igaz-e, hogy ha A, B tetszőleges $n \times n$-es mátrixok, akkor

$$(A-B)(A+B) = A^2 - B^2?$$

Szorgalmi feladatok

1.7. Feladat. Legyen A tetszőleges $n \times k$ méretű mátrix. Adjunk meg olyan P, illetve Q mátrixokat, melyekre a PAQ szorzat egy olyan 1×1-es mátrix, mely A i. sorának j. elemét tartalmazza.

1.8. Feladat. Számítsuk ki a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix n-edik hatványát.

1.9. Feladat. Számítsuk ki a $\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ mátrix n-edik hatványát.

1.10. Feladat. Számítsuk ki az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix n-edik hatványát.

1.11. Feladat. Számítsuk ki az $A = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$ mátrix n-edik hatványát.

1.12. Feladat. Oldjuk meg az $AX = E$ mátrixegyenletet, ahol A az alábbi $n \times n$-es mátrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

1.13. Feladat. Határozzuk az összes olyan 2×2-es valós mátrixot, melynek a négyzete a nullmátrix.

1.14. Feladat. Az $A = (a_{ij})_{n\times n}$ mátrix *nyoma* (trace) a főátlóban lévő elemek összege: $\mathrm{tr}\,(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$.
Igazoljuk, hogy bármely $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixra $\mathrm{tr}\left(AA^T\right) \geq 0$, és az egyenlőség csak $A = \underline{0}$ esetén áll fenn.

1.15. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixokra $\mathrm{tr}\ (AB) = \mathrm{tr}\ (BA)$.

1.16. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $Q, R, A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixokra

$$RQ = E_n \implies \mathrm{tr}\,(QAR) = \mathrm{tr}\,(A)\,.$$

1.17. Feladat. Az exponenciális függvényre ismert a következő képlet:

$$\exp\,(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Itt $e \sim 2.718\,281$ a természetes logaritmus alapszáma, a végtelen összeget pedig egyelőre elég intuitívan értelmezni. Számítsuk ki az $\exp\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ mátrixot.

1.18. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy nem léteznek olyan $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ mátrixok, melyekre teljesül az

$$AB - BA = E_n$$

egyenlőség.