

## 10. feladatsor – Sajátérték, sajátvektor

**10.1. Feladat.** Legyen a megfelelő  $\mathbb{R}^n$  vektortérben értelmezett lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban  $A$ . Határozzuk meg a lineáris transzformációk karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, valamint adjunk meg bázist a sajátalterekben.

a)  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$   
b)  $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix};$   
c)  $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$

**10.2. Feladat.** Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk sajátértékeit, és adjuk meg a sajátalterek egy bázisát.

a)  $\varphi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (x - y, x + 3y);$   
b)  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (-x + 8y - 2z, 3y - z, 4y - 2z);$   
c)  $\varphi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, (x, y, z) \mapsto (-3x + 5y + z, x + y - 9z, -4z).$

**10.3. Feladat.** Határozzuk meg a sík  $\mathbb{R}^2$  vektorterében értelmezett következő lineáris transzformációk sajátértékeit, valamint a sajátalterek egy bázisát.

- a) identikus transzformáció;
- b) zérus transzformáció;
- c) tükrözés az  $x$  tengelyre;
- d) merőleges vetítés az  $y$  tengelyre;
- e)  $\pi/2$  szögű forgatás az origó körül.

### Szorgalmi feladatok

**10.4. Feladat.** .

- a) Adjunk meg  $\mathbb{R}^2$ -ben egy olyan lineáris transzformációt, amelynek a 2 sajátértéke.
- b) Adjunk meg  $\mathbb{R}^3$ -ben egy olyan lineáris transzformációt, amelynek a -3 sajátértéke.

**10.5. Feladat.** Adjunk meg az  $\mathbb{R}^2$  vektortérben egy olyan lineáris transzformációt, amelynek a 4 sajátértéke, és a sajátaltere 2 dimenziós. Hány ilyen lineáris transzformáció létezik?

**10.6. Feladat.** Adjuk meg az  $a$  valós paraméter azon értékeit, melyekre a 2 nem lesz az  $A$  mátrix sajátértéke.

a)  $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -2 & 1 \end{pmatrix};$   
b)  $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}.$

**10.7. Feladat.** Az  $a$  valós paraméter mely értékei esetén lesz az alábbi  $A$  mátrix sajátvektora az  $(1, -1, a)$  vektor?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & a \end{pmatrix}.$$

**10.8. Feladat.** Mi a kapcsolat a következő három sor között  $2 \times 2$ -es valós mátrixok esetén:

- (1) determináns és nyom;
- (2) sajátértékek;
- (3) karakterisztikus polinom és a Viète-képletek.