9. feladatsor – Lineáris leképezések

9.1. Feladat. Melyek lineárisak az alábbi leképezések közül? Amelyik lineáris, annak határozzuk meg a képterét és a magterét, illetve ezek dimenzióját, bázisát.

a) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + y, xy)$;
b) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y, z) \mapsto (x - y, x + y)$;
c) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y) \mapsto (x - 2y, -2x + 4y, -4x + 8y)$;
d) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (x - y, y + 1, x + z)$.

9.2. Feladat. A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterében tekintsük a következő transzformációkat. Döntsük el, hogy lineáris transzformációk-e. Ha igen, akkor adjuk meg a magjukat, képterüket és azok dimenzióját, bázisát.

a) eltolás az $(1, 1)$ vektorral;
b) tükrözés az x tengelyre;
c) merőleges vetítés az y tengelyre;
d) $\pi/2$ szögű forgatás az origó körül;
e) tükrözés az $y = x$ egyenesre.

9.3. Feladat. Tekintsük a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén értelmezett alábbi φ és ψ lineáris transzformációkat. Határozzuk meg a $\varphi+\psi$ és a $\varphi\psi$ lineáris transzformációkat.

a) φ az x-tengelyre, ψ az y-tengelyre vonatkozó tükrözés;
b) φ az x-tengelyre, ψ az y-tengelyre vonatkozó merőleges vetítés;
c) φ az identikus transzformáció, ψ az origó körüli $\pi/2$ szögű forgatás;
d) φ az origó körüli $\pi/3$ szögű, ψ az origó körüli $-\pi/3$ szögű forgatás.

9.4. Feladat. Határozzuk meg az alábbi $\mathcal{E}$ illetve $\mathcal{F}$ bázisok esetén az $\mathcal{E}$ bázisról az $\mathcal{F}$ bázisra való bázisáttérés mátrixát, valamint az $\mathcal{F}$-ről $\mathcal{E}$-re való bázisáttérés mátrixát.

a) $\mathcal{E}\colon (1, 0), (0, 1),\quad \mathcal{F}\colon (2, -1), (-1, 0)$;
b) $\mathcal{E}\colon (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1),\quad \mathcal{F}\colon (2, 0, 0), (0, 1, 1), (0, 1, -1)$.

9.5. Feladat. Határozzuk meg a következő φ lineáris transzformációk mátrixát az előző feladatban szereplő megfelelő $\mathcal{E}$, illetve $\mathcal{F}$ bázisokban. Számítsuk ki a v vektor φ melletti képének koordinátáit mindkét bázisban.

a) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x + 3y, 2x - y),\ v = (1, -3)$;
b) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (2x - y, x + y, 3x - 2y - z),\ v = (2, 2, 0)$.

Szorgalmi feladatok

9.6. Feladat. Legyen V a legfeljebb harmadfokú valós együtthatós polinomok vektortere . Döntsük el, hogy V megadott transzformációi lineárisak-e. Ha igen, akkor adjuk meg a lineáris transzformáció magját, képterét és azok dimenzióját. ($f = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, ahol $a_i \in \mathbb{R}$.)

a) $f \mapsto f'$ (f deriváltja);
b) $f \mapsto a_0x$;
c) $f \mapsto f$ maradéka $x^2 + x + 2$-vel osztva.

9.7. Feladat. Létezik-e a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén értelmezett olyan φ lineáris transzformáció, amely teljesülnek a következő tulajdonságok? Ha létezik, akkor adjunk is meg egy-egy ilyen transzformációt.

a) $\mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi = \emptyset$;
b) $\mathrm{Ker}\varphi \cap \mathrm{Im}\varphi = \{\underline{0}\}$;
c) $\mathrm{Ker}\varphi \subset \mathrm{Im}\varphi$;
d) $\mathrm{Im}\varphi \subset \mathrm{Ker}\varphi$;
e) $\mathrm{Ker}\varphi = \mathrm{Im}\varphi$.

9.8. Feladat. Tekintsük $\mathbb{R}^2$-ben az $U = \{(x,x) : x \in \mathbb{R}\}$ és a $W = \{(x,-x) : x \in \mathbb{R}\}$ altereket. Adjunk meg olyan φ lineáris transzformációt, amelyre $\mathrm{Ker}\,\varphi = U$ és $\mathrm{Im}\,\varphi = W$. Adjunk meg olyan ψ lineáris transzformációt is, amelyre $\mathrm{Ker}\,\psi = W$ és $\mathrm{Im}\,\psi = U$.

9.9. Feladat. Adottak a V vektortérben az U és W alterek. Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy létezzék olyan φ lineáris transzformáció, amelyre $\mathrm{Ker}\,\varphi = U$ és $\mathrm{Im}\,\varphi = W$?

9.10. Feladat. Mennyi lehet egy $\varphi\colon \mathbb{R}^9 \to \mathbb{R}^5$ lineáris leképezés magjának dimenziója? Adjunk meg egy-egy példát a legkisebb és a legnagyobb értékre.

9.11. Feladat. A $\varphi \in \mathrm{Hom}(U,V)$ lineáris leképezésről tudjuk, hogy

(1) bármely négy elem képe lineárisan függő vektorrendszert alkot;
(2) bármely hat lineárisan független U-beli elem között van olyan, amelynek képe nem a zéróvektor.

Mekkora lehet U dimenziója?

9.12. Feladat. Mutassa meg, hogy tetszőleges n-dimenziós vektortérben

a) az identikus transzformáció mátrixa minden bázisban az $n\times n$-es egységmátrix;
b) a zérus transzformáció mátrixa minden bázisban az $n \times n$-es zérusmátrix.

9.13. Feladat. Adjunk meg egy izmorfizmust a valós szám n-esek $\mathbb{R}^n$ vektortere és a legfeljebb $(n-1)$-ed fokú valós együtthatós polinomok vektortere között.