8. feladatsor – Mátrix rangja, Homogén lineáris egyenletrendszer

8.1. Feladat. Határozzuk meg a következő mátrixok rangját, valamint adjunk meg a mátrixokban maximális méretű nemeltűnő aldeterminánst.

$$\textbf{a)}\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \textbf{b)}\ \begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \\ 8 & 4 & 2 \end{pmatrix}, \quad \textbf{c)}\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -3 & 6 & -9 \\ 2 & -4 & 6 \\ -4 & 8 & -12 \end{pmatrix}$$

8.2. Feladat. Kronecker-Capelli tétel felhasználásával döntsük el, hogy az alábbi egyenletrendszer a λ valós paraméter mely értékeire oldható meg.

$$\textbf{a)}\ \begin{array}{lcr} x_1 + x_2 + x_3 & = & 3 \\ -x_1 + 3x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ x_1 + 5x_2 & = & \lambda - 4 \end{array};$$

$$\textbf{b)}\ \begin{array}{lcr} x_1 + x_2 + 2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 & = & -4 \\ 3x_1 + 4x_3 & = & \lambda \end{array}.$$

8.3. Feladat. Határozzuk meg hány dimenziós a következő homogén lineáris egyenletrendszerek megoldástere, valalmint adjunk meg a megoldástér egy bázisát (azaz adjunk meg egy fundamentális rendszerét).

$$\textbf{a)}\ \begin{array}{lcl} x_1 + x_2 - 2x_3 & = & 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 & = & 0 \\ 2x_1 - 3x_3 & = & 0 \end{array};$$

$$\textbf{b)}\ \begin{array}{lcl} x_1 + x_4 & = & 0 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = & 0 \\ 2x_2 + x_3 - x_4 & = & 0 \end{array};$$

$$\textbf{c)}\ \begin{array}{lcl} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 + x_5 & = & 0 \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 & = & 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_4 - x_5 & = & 0 \end{array}.$$

Szorgalmi feladatok

8.4. Feladat. Hány maximális méretű nemeltűnő aldeterminánsa van az alábbi mátrixnak?

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

8.5. Feladat. A p valós paraméter értékétől függően határozzuk meg a következő mátrix rangját.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ p & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & p \end{pmatrix}$$

8.6. Feladat. Határozzuk meg a következő mátrixok rangját a λ paraméter függvényében:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & -1 & 2 \\ 2 & -1 & \lambda & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

8.7. Feladat. Egy $n \times m$-típusú ($n \geq 2, m \geq 2$) mátrix első sorának és első oszlopának minden eleme 0-tól különböző valós szám, de minden más eleme 0. Mennyi a mátrix rangja?

8.8. Feladat. Egy $n \times n$-típusú mátrix első sorának és főátlójának minden eleme 0-tól különböző valós szám, a mátrix többi eleme 0. Mennyi a mátrix rangja?

8.9. Feladat. Egy n ismeretlenes egyenletrendszer bővített mártrixának van determinánsa, és ez a determináns nem 0. Mit mondhatunk az egyenletrendszer megoldhatóságáról?

8.10. Feladat. Melyek igazak a következő állítások közül tetszőleges m egyenletből álló n ismeretlenes lineáris egyenletrendszerre? Ha nem teljesül az állítás, adjunk ellenpéldát.

a) Ha $n > m$, akkor végtelen sok megoldás van.
b) Ha $n = m$, akkor pontosan egy megoldás van.
c) Ha pontosan egy megoldás van, akkor $n = m$.
d) Ha $n < m$, akkor nincs megoldás.
e) Ha $m < n$, akkor nem lehet pontosan egy megoldás.
f) Ha $n = m$ és végtelen sok megoldás van, akkor az együtthatókból álló determináns 0.
g) Ha $n = m$ és az együtthatókból álló determináns 0, akkor végtelen sok megoldás van.

8.11. Feladat. Adjuk meg az alábbi homogén lineáris egyenletrendszerben az a paraméter értékét úgy, hogy a megoldástér dimenziója 3 legyen, valamint ekkor adjunk is meg bázist a megoldásterében.

$$\begin{aligned} x_2 + x_3 - ax_5 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + ax_3 - 3x_4 &= 0 \\ x_1 + ax_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 &= 0 \end{aligned}$$

8.12. Feladat. Tekintsük a következő homogén lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 + x_5 &= 0 \\ x_2 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Adottak a következő vektorok $\mathbb{R}^5$-ben $u = (1,1,1,1,1)$, $v = (1,0,-2,0,1)$, $w = (0,-1,0,1,0)$, $x = (1,-2,-2,2,1)$ $y = (1,0,-1,0,0)$. Döntsük el, hogy az alábbi vektorrendszerek bázist alkotnak-e a fenti egyenletrendszer megoldásainak alterében?

a) u, v, w;
b) v, w, x;
c) w, x, y.