7. feladatsor – Dimenzió, bázis

7.1. Feladat. Döntsük el a V vektortér adott vektorrendszeréről, hogy bázis-e, határozzuk meg a vektorrendszer rangját.

a) $V = \mathbb{R}^3,\ (1,-1,2),(1,1,1),(0,1,2),(1,-2,1)$;
b) $V = \mathbb{R}^3,\ (1,-1,0),(1,1,1),(1,-3,-1)$;
c) $V = \mathbb{R}^3,\ (1,2,-1),(-1,1,1),(1,2,0)$;
d) $V = \mathbb{R}^4,\ (1,-1,1,1),(0,1,2,1),(1,1,1,0),(-1,2,1,1)$.

7.2. Feladat. Határozzuk meg a v vektor koordinátáit a megadott bázisban.

a) $v = (1,-1,1)$, bázis: $(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)$;
b) $v = (1,-1,1)$, bázis: $(1,-1,2),(0,0,1),(1,2,3)$;
c) $v = (1,2,1)$, bázis: $(-1,2,1),(1,2,3),(-1,1,1)$;

7.3. Feladat. Határozzuk meg $\mathbb{R}^4$ következő altereinek dimenzióját és bázisát.

a) $U = [(0,1,2,4),(2,-1,2,2),(1,-1,1,2)]$;
b) $U = [(1,2,4,1),\ (-2,-4,-5,-3),(-1,-2,-7,0),\ (1,2,-2,3)]$;
c) $U = [(1,-1,1,2),(-1,2,1,2),(1,0,1,0),(1,1,3,4)]$;
d) $U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_1 = 2x_2,\ x_3 = x_1 + x_2\}$;
e) $U = \{(x_1,x_2,x_3,x_4)\colon x_1 = 3x_2 + x_3,\ x_4 = 0\}$.

7.4. Feladat. Határozzuk meg $\mathbb{R}^4$ alábbi alterei esetén az $U_1 + U_2$ és $U_1 \cap U_2$ alterek dimenzióját, bázisát.

a) $U_1 = [(1,2,1,0),(-1,1,1,1)],\ U_2 = [(2,1,0,-1),(1,-1,3,7)]$;
b) $U_1 = [(1,2,1,3),(0,-2,3,-1)]$,
$U_2 = [(0,2,-3,1),(0,-2,4,-4),(0,-6,11,-9)]$;
c) $U_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$,
$U_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + x_2 = 0,\ x_3 = 2x_4\}$;
d) $U_1 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : x_1 + x_2 + x_3 = 0,\ x_2 - 2x_3 = 0\}$,
$U_2 = \{(x_1,x_2,x_3,x_4) : 2x_2 - 4x_3 = 0,\ 3x_3 + x_4 = 0\}$.

Szorgalmi feladatok

7.5. Feladat. Adjuk meg az x paraméter értékét úgy, hogy az adott vektorrendszer NE legyen bázisa az $\mathbb{R}^4$ vektortérnek:

a) $(1,-1,0,1),(1,1,1,0),(-1,x,2,1)$,
b) $(1,0,1,2),(-1,2,1,2),(1,0,1,0),(1,2,4,x)$,
c) $(1,-2,3,1),(0,1,-1,1),(2,-3,6,5),(-1,1,0,x)$.

7.6. Feladat. Adjunk meg bázist $\mathbb{R}^{100}$ alábbi altereiben, és határozzuk meg a dimeziójukat.

a) $U_1 = \{(x_1,\dots,x_{100})\colon\ x_1 = x_3 = \cdots = x_{99} = 0\}$;
b) $U_2 = \{(x_1,\dots,x_{100})\colon\ x_1 = x_3 = \cdots = x_{99}\}$;
c) $U_3 = \{(x_1,\dots,x_{100})\colon\ x_1 + x_2 + \cdots + x_{50} = x_{51} + x_{52} + \cdots + x_{100}\}$.

7.7. Feladat. Döntsük el, hogy a következő vektorrendszerek bázist alkotnak-e a legfeljebb másodfokú valós együtthatós polinomok vektorterében.

a) $1,\ 1+x,\ 1+x+x^2$;
b) $x,\ 1+x,\ 1+x^2$;

c) $1+x^2,\ x-x^2,\ -1+x-2x^2.$

7.8. Feladat. Legyenek a v vektor koordinátái $(1,\ \alpha_2,\ \ldots,\alpha_n)$ a $v_1,\ldots,v_n$ bázisban. Igazoljuk, hogy ekkor a $v,v_2,\ldots,v_n$ vektorrendszer is bázis, és adjuk meg benne a v_1 vektor koordinátáit.

7.9. Feladat. Döntsük el, hogy meg lehet-e adni egy 99-dimenziós vektortérben két 50-dimenziós alteret úgy, hogy csak a nullvektor a közös elemük?

7.10. Feladat. Legyen V 10-dimenziós vektortér, U_1 8-dimenziós, U_2 9-dimenziós altér V-ben. Hány dimenziós lehet az $U_1\cap U_2$ altér?

7.11. Feladat. Döntsük el, hogy igazak-e a következő állítások.

a) Ha egy V vektortérben $v_1,v_2,\ldots,v_n$ vektorok bázist alkotnak, akkor van olyan v eleme a V-nek, amelyre $v_1,v_2,\ldots,v_n,v$ lineárisan függő vektorrendszert alkot.

b) Ha egy V vektortérben $v_1,v_2,\ldots,v_n$ vektorok bázist alkotnak, akkor van olyan v eleme a V-nek, amelyre $v_1,v_2,\ldots,v_n,v$ nem generálja V-t.

c) Ha egy V vektortérnek nincs 5-elemű generátorrendszere, akkor a V vektortér dimenziója kisebb, mint 5.

d) Ha a v_1,v_2,v_3,v_4 vektorok lineárisan független vektorrendszert alkotnak egy V vektortérben, és v_1,v_2,v_3,v_4,v_5 pedig lineárisan függő vektorrendszert alkot, akkor v_1,v_2,v_3,v_4 vektorok bázist alkotnak V-ben.

e) Ha egy vektortérben van 4-elemű lineárisan függyetlen vektorrendszer, és 6-elemű generátorrendszer, akkor a vektortér 5-dimenziós.

f) Ha egy n-dimenziós vektortérben valamely k-elemű lineárisan független vektorrendszernek van olyan l-elemű részrendszere, mely a vektortér generátorrendszere, akkor $n=k=l$.