

4. feladatsor – Lineáris egyenletrendszerek

4.1. Feladat. Oldjuk meg Gauss elimináció segítségével az alábbi lineáris egyenletrendszereket. Ha lehetséges, Cramer-szabállyal is oldjuk meg.

$$\begin{array}{l} x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -9 \\ \text{a) } x_1 - x_2 + 3x_3 = 2 ; \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 = 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 = 6 \\ \text{b) } x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 ; \\ 7x_1 + 7x_2 + 8x_3 = 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 1 \\ \text{c) } 2x_1 + 6x_2 - 7x_3 + x_4 = 6 ; \\ -3x_1 - 9x_2 + 10x_3 - x_4 = -11 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ \text{d) } x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = 14 \end{array}$$

4.2. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert $a = 23$, illetve $a = 24$ esetén.

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = -2 \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 = a \end{array}$$

Szorgalmi feladatok

4.3. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ahol a, b, c valós paraméterek.

$$\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = a \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 = b \\ x_1 - 2x_2 + x_3 + 5x_4 = c \end{array}$$

4.4. Feladat. Oldjuk meg (az a paraméter függvényében) az alábbi lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{array}{l} x_1 - x_2 + x_3 + ax_4 = 1 \\ x_1 + (1 - a)x_3 + (a - 1)x_4 = 2 \\ x_1 - ax_3 + (a - 2)x_4 = 1 \\ -ax_1 + ax_2 + 2ax_3 + 2x_4 = 3a - 1 \end{array}$$

4.5. Feladat. Oldjuk meg (az a paraméter függvényében) az alábbi lineáris egyenletrendszert.

$$\begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 - 2x_2 + (a^2 - 8)x_3 = a + 4 \end{array}$$

4.6. Feladat. Oldjuk meg a következő egyenletrendszert, ahol a valós paraméter.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 - x_3 &= 1 \\2x_1 + 3x_2 + ax_3 &= 3 \\x_1 + ax_2 + 3x_3 &= 2\end{aligned}$$

4.7. Feladat. Az a, b valós paraméterek mely értékeire szabályos az alábbi egyenletrendszer? Ezen értékekre oldjuk meg az egyenletrendszert Cramer-szabály segítségével. A többi esetben pedig Gauss-eliminációval határozzuk meg a megoldást.

$$\begin{aligned}ax_1 + x_2 + x_3 &= 4 \\x_1 + bx_2 + x_3 &= 3 \\x_1 + 2bx_2 + x_3 &= 4\end{aligned}$$

4.8. Feladat. Keressük meg a következő lineáris egyenletrendszer általános megoldását.

$$\begin{aligned}x_1 + x_2 + \dots + x_n &= 1 \\a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n &= b \\a_1^2x_1 + a_2^2x_2 + \dots + a_n^2x_n &= b^2 \\&\vdots \\a_1^{n-1}x_1 + a_2^{n-1}x_2 + \dots + a_n^{n-1}x_n &= b^{n-1}\end{aligned}$$

(a_1, a_2, \dots, a_n páronként különböző valós számok)

4.9. Feladat. Keressük meg a következő lineáris egyenletrendszer általános megoldását.

$$\begin{aligned}ax_1 + x_2 + x_3 + \dots + x_n &= 1 \\x_1 + ax_2 + x_3 + \dots + x_n &= 1 \\x_1 + x_2 + ax_3 + \dots + x_n &= 1 \\&\vdots \\x_1 + x_2 + x_3 + \dots + ax_n &= 1\end{aligned}$$

(a tetszőleges valós szám)

4.10. Feladat. Egyszer volt, hol nem volt, volt egyszer hét kicsi kecske. A mamájuk hozott nekik 2,1 liter tejcskét, és szétosztotta a hét kicsi bögrécskébe, de nem sikerült igazságosan elosztania. Az első kicsi kecske így szólt: – Én annyira szeretem a testvérkéimet, hogy inkább lemondok a tejcskémről a javukra. – Azzal egyenlően szét is osztotta a tejcskéjét a hat testvérkéje között. A második kicsi kecske is nagyon jószívú volt, ő is szétosztotta a bögrécskéjében lévő tejcskét hat testvérkéje között. Így tett sorban a többi kicsi kecske is. És – lássatok csudát! – a végén minden kicsi bögrécskében ugyanannyi tejcске volt, mint a legelején. Azaz mennyi?