2. feladatsor – Determinánsok

2.1. Feladat. Határozzuk meg a következő determinánsokat.

$$\textbf{a)}\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 6 \end{vmatrix} \quad \textbf{b)}\ \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \textbf{c)}\ \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 7 \\ 8 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 6 \end{vmatrix}.$$

2.2. Feladat. Határozzuk meg az $\underline{a} = (1, 2, -3)$, $\underline{b} = (2, 1, -4)$ és $\underline{c} = (1, 0, 3)$ helyvektorok által kifeszített paralelepipedon térfogatát.

2.3. Feladat. Adjuk meg az x értékét úgy, hogy teljesüljön az alábbi egyenlőség.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & x \end{vmatrix} = 8.$$

2.4. Feladat. Határozzuk meg x^3 együtthatóját az alábbi determinánsban.

$$\begin{vmatrix} 5x & 1 & 2 & 3 \\ x & x & 1 & 2 \\ 1 & 2 & x & 3 \\ x & 1 & 2 & x \end{vmatrix}$$

2.5. Feladat. Számítsuk ki a következő determinánst.

$$\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 4 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 12 & 6 & 12 & 24 & 48 \\ 4 & -3 & 9 & -27 & 81 \end{vmatrix}$$

Szorgalmi feladatok

2.6. Feladat. Legyen $a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{|i-j|}, & \text{ha } i \neq j; \\ 2, & \text{ha } i = j. \end{cases}$
Számítsuk ki az $A = (a_{ij})_{n\times n}$ mátrix determinánsát.

2.7. Feladat. Tekintsük a síkban azt a paralelogrammát, amelynek egyik csúcsa az origó, a vele szomszédos két csúcs koordinátái (a, b) és (c, d). Igazolja, hogy a paralelogramma területe az $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ determináns abszolút értéke.

2.8. Feladat. Ha olyan nemnulla determinánsú $n \times n$-es mátrixot akarunk felírni, amelyben minden elem nulla vagy egy, akkor legalább hány egyest kell felhasználnunk? És mennyi a nullák számának minimuma?

2.9. Feladat. Mekkora lehet maximum egy olyan 3×3-as determináns értéke, amelynek minden eleme ± 1? Mi a maximum a 4×4-es esetben?

A következő feladatokban a determinánsok értékét kell kiszámolni, ha nem derül ki a determináns rendje, akkor n-ed rendűnek kell tekinteni.

2.10. Feladat.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

2.11. Feladat.

$$\begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$$

2.12. Feladat.

$$\begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & n & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & n & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}$$

2.13. Feladat.

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & \dots & 3 & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 2 & n-1 & \dots & 2 & 2 & 2 \\ n & 2 & \dots & 2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

2.14. Feladat.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & x & \dots & x \\ 1 & x & 0 & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x & x & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

2.15. Feladat.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$