

1. feladatsor – Mátrixok

1.1. Feladat.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki a következő mátrixokat: $A + B$, $3A$, B^T , BC , AC .

1.2. Feladat. Legyen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, C = (1 \ 2 \ 0)$$

$$D = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, E = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Számítsuk ki az alábbi mátrixokat (amennyiben léteznek).

$$AB, BA, CB, BC, DC, CD, EB^T, BF, E^T A, \\ F^2, D^T C^T, (A + B)C, (A + B^T)D, AD + B^T D$$

1.3. Feladat. Számítsuk ki az $f(x) = x^2 + 3x - 4$ polinom helyettesítési értékét az A helyen.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

1.4. Feladat. Adjuk meg az összes olyan mátrixot, amely A -val felcserélhető!

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$$

1.5. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixot:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^n$$

1.6. Feladat. Igaz-e, hogy ha A, B tetszőleges $n \times n$ -es mátrixok, akkor

$$(A - B)(A + B) = A^2 - B^2?$$

Szorgalmi feladatok

1.7. Feladat. Legyen A tetszőleges $n \times k$ méretű mátrix. Adjunk meg olyan P , illetve Q mátrixokat, melyekre a PAQ szorzat egy olyan 1×1 -es mátrix, mely A i . sorának j . elemét tartalmazza.

1.8. Feladat. Számítsuk ki a $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix n -edik hatványát.

1.9. Feladat. Számítsuk ki a $\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$ mátrix n -edik hatványát.

1.10. Feladat. Számítsuk ki az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix n -edik hatványát.

1.11. Feladat. Oldjuk meg az $AX = E$ mátrixegyenletet, ahol A az alábbi $n \times n$ -es mátrix.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

1.12. Feladat. Határozzuk meg az x^2 polinom összes gyökét $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ -ben.

1.13. Feladat. Az $A = (a_{ij})_{n \times n}$ mátrix *nyoma* (trace) a főátlóban lévő elemek összege: $\text{tr}(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn}$.

Igazoljuk, hogy bármely $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixra $\text{tr}(AA^T) \geq 0$, és az egyenlőség csak $A = 0$ esetén áll fenn.

1.14. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixokra $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$.

1.15. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges $Q, R, A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixokra

$$RQ = E_n \implies \text{tr}(QAR) = \text{tr}(A).$$

1.16. Feladat. Az exponenciális függvényre ismert a következő képlet:

$$\exp(x) = e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Itt $e \sim 2.718281$ a természetes logaritmus alapszáma, a végtelen összeget pedig egyelőre elég intuitívan értelmezni. Számítsuk ki az $\exp \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$ mátrixot.

1.17. Feladat. Tegyük fel, hogy az $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixokra $AB = E$ teljesül, továbbá A minden eleme pozitív. Bizonyítsa be, hogy B elemei között legalább n , de legfeljebb $n^2 - n$ pozitív szám van. Alkalmas példák megadásával mutassa meg, hogy ezek a becslések minden n -re élesek.

1.18. Feladat. Jelölje A_1, \dots, A_{12} egy ikozaéder csúcsait, és legyen $A = (a_{ij})_{12 \times 12}$ az alábbi képlettel definiált mátrix:

$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{ha } A_i \text{ és } A_j \text{ az ikozaéder egy élének két végpontja;} \\ 0, & \text{ha } A_i \text{ és } A_j \text{ nem szomszédos (} i = j \text{ esetén is!).} \end{cases}$$

Ezt a mátrixot az ikozaéder (pontosabban az ikozaéder gráfja) *adjacenciamátrixának* nevezzük. Igazolja, hogy van olyan k kitevő, melyre A^k egyetlen eleme sem 0.

1.19. Feladat. Az előző feladathoz hasonlóan tetszőleges poliéderhez (vagy akár gráfhoz) lehet adjacenciamátrixot rendelni. Bizonyítsa be, hogy bármely ilyen A mátrixra $\text{Tr}(A^3)$ osztható 3-mal.