10. feladatsor – Sajátérték, sajátvektor

10.1. Feladat. Legyen a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben értelmezett lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban A. Határozzuk meg a lineáris transzformációk karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, valamint adjunk meg bázist a sajátalterekben.

a) $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$;

c) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

10.2. Feladat. Határozzuk meg az alábbi lineáris transzformációk sajátértékeit, és adjuk meg a sajátalterek egy bázisát.

a) $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2,\ (x, y) \mapsto (x - y,\ x + 3y)$;

b) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (-x + 8y - 2z,\ 3y - z,\ 4y - 2z)$;

c) $\varphi\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ (x, y, z) \mapsto (-3x + 5y + z,\ x + y - 9z,\ -4z)$.

10.3. Feladat. Határozzuk meg a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterében értelmezett következő lineáris transzformációk sajátértékeit, valamint a sajátalterek egy bázisát.

a) identikus transzformáció;

b) zérus transzformáció;

c) tükrözés az x tengelyre;

d) merőleges vetítés az y tengelyre;

e) $\pi/2$ szögű forgatás az origó körül.

Szorgalmi feladatok

10.4. Feladat. .

a) Adjunk meg $\mathbb{R}^2$-ben egy olyan lineáris transzformációt, amelynek a 2 sajátértéke.

b) Adjunk meg $\mathbb{R}^3$-ben egy olyan lineáris transzformációt, amelynek a -3 sajátérétke.

10.5. Feladat. Adjunk meg az $\mathbb{R}^2$ vektortérben egy olyan lineáris transzformációt, amelynek a 4 sajátértéke, és a sajátaltere 2 dimenziós. Hány ilyen lineáris transzformáció létezik?

10.6. Feladat. Adjuk meg az a valós paraméter azon értékeit, melyekre a 2 nem lesz az A mátrix sajátértéke.

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$;

b) $A = \begin{pmatrix} 1 & a & -1 \\ -2 & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

10.7. Feladat. Az a valós paraméter mely értékei esetén lesz az alábbi A mátrix sajátvektora az $(1, -1, a)$ vektor?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & a \end{pmatrix}.$$