

Kvadratikus alakok 6.5 feladat

Hogyan oldjuk meg a 6.5 feladattípust?

- Megadjuk a kvadratikus alak mátrixát: a négyzetes tagokhoz (x_1^2, x_2^2 stb.) tartozó együtthatókat beírjuk a mátrix főátlójába, az egyéb tagokhoz tartozó együtthatók **felét** pedig beírjuk az adott taghoz tartozó **mindkét** helyre, például ha a kvadratikus alakban $3x_2x_5$ szerepel, akkor $\frac{3}{2}$ -et írunk a mátrix második sorának 5. helyére és a mátrix ötödik sorának 2. helyére.
- **Szimmetrizált eliminációs eljárást** végzünk (lásd a következő diát), amivel diagonális mátrixot kapunk végállapotként.
- Leolvassuk a kanonikus alakot. Ehhez a végállapotban kapott mátrix főátlójában megszámloljuk a pozitív és a negatív elemeket. Ha például 1 pozitív és 3 negatív elem adódott, a kanonikus alak:
 $y_1^2 - y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$.
- Leolvassuk a kvadratikus alak osztályát (lásd későbbi dián).

A szimmetrizált eliminációs eljárás menete:

- Kiválasztunk egy nemnulla elemet a főátlóból.
- Ha van a kiválasztott elem alatt/fölött nemnulla elem, azt eltüntettem oly módon, hogy az adott elem sorából a kiválasztott elem sorának megfelelőszörösét kivonom (vagy hozzáadom).
- Mivel ez egy szimmetrizált eliminációs eljárás, minden lépés után végre kell hajtanom a szimmetrizáltját: ha például a második sorból kivontam a negyedik ötszörösét, utána rögtön ki kell vonnom a második oszlopból a negyedik ötszörösét.
- Miután a kiválasztott elem alatt/fölött (és a szimmetrizáltság miatt egyben balról/jobbról) eltüntettem az összes nemnulla elemet, új elemet választok a főátlóban.
- Ha nem tudok új nemnulla elemet választani a főátlóban, egy random lépés segít: például az első sorhoz hozzáadom a másodikat, és rögtön utána az első oszlophoz is hozzáadom a második oszlopot. Fontos, hogy a random lépés ne bolygassa meg azokat a sorokat/oszlopokat, amelyekből korábban választottam elemet.

Az osztály leolvasásának menete a végállapotból:

Ha befejeztük a szimmetrizált eliminációs eljárást, csak azt kell megnézni, hogy van-e pozitív, negatív szám, illetve 0 a főátlóban. A kvadratikus alak osztálya

- pozitív definit, ha a főátlóban csak pozitív számok vannak,
- negatív definit, ha a főátlóban csak negatív számok vannak,
- pozitív szemidefinit, ha a főátlóban van pozitív szám és 0, de nincs negatív szám,
- negatív szemidefinit, ha a főátlóban van negatív szám és 0, de nincs pozitív szám,
- indefinit, ha a főátlóban van pozitív és negatív szám is,
- elfajuló, ha a főátlóban csupa 0 van.

Felírjuk a kvadratikus alak mátrixát:

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Felhívom a figyelmet, arra, hogy a nem négyzetes tagokhoz tartozó együtthatók feleződtek, ezért került a $-4x_1x_2$ miatt -2 az első sor második, és a második sor első helyére, a $-4x_1x_3$ miatt pedig -2 az első sor harmadik, és a harmadik sor első helyére.

6.5 c, megoldása

Kiválasztom a középső 1-est. A fölötte lévő -2 -est úgy tüntetem el, hogy hozzáadom az első sorhoz a második kétszeresét. Ezután viszont kötelező az első oszlophoz hozzáadni a második oszlop kétszeresét.

$$\begin{pmatrix} 8 & -2 & -2 \\ -2 & \color{red}{1} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \color{green}{4} & \color{green}{0} & \color{green}{-2} \\ -2 & \color{red}{1} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \color{green}{4} & 0 & -2 \\ \color{green}{0} & \color{red}{1} & 0 \\ \color{green}{-2} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A lépéspár elvégzése után szimmetrikus mátrix kell, hogy adódjon.

Most a jobb alsó 1-est választom.

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonális alakra jutottunk, így vége is az eljárásnak, a főátlóban két pozitív elem van és egy 0. A kanonikus alak $y_1^2 + y_2^2$, az osztály pozitív szemidefinit.

6.5 f, megoldása

A kvadratikus alak mátrixa:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Gondban vagyunk: a főátlóban minden elem 0, így nem tudunk mit választani. Ezért egy random lépésre lesz szükségünk: az első sorhoz hozzáadjuk a másodikat, aztán az első oszlophoz a második oszlopot.

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

6.5 f, megoldása

Nem igazán szeretjük a törteket, ezért a mátrix összes sorát megszorozzuk $\sqrt{2}$ -vel. Azért pont annyival, mert a szimmetrizáltság miatt ekkor a mátrix összes oszlopát is be kell szorozni $\sqrt{2}$ -vel, ez a lépéspár pedig azt eredményezi, hogy a mátrix minden eleme megduplázódik:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.5 f, megoldása

Most már ki tudjuk választani a 2-t, és csinálhatunk két lépéspárt:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6.5 f, megoldása

Megint megduplázom a mátrix összes elemét, kiválasztok egy elemet, és csinálok egy lépéspárt:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Újra gondba kerültem. A random lépéspár most nem vonatkozhat at első két sorra/oszlopra:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

6.5 f, megoldása

Még egy utolsó kijelölésre és lépéspárra lesz szükség:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Diagonális mátrixhoz jutottunk, a főátlóban két pozitív és két negatív szám áll, ezért a kanonikus alak: $y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2$, az osztály indefinit.