

Lineáris algebra

6.3. (b) és (d) feladat

Bolyai Intézet
2020. április 17.

A 6.3. feladatban mátrix megadott λ sajátértékéhez tartozó sajátalterében kell bázist megadni. Először meghatározzuk a sajátértékhez tartozó sajátalteret, majd ezután adunk meg benne bázist.

Először oldjuk meg a (b) feladatrészt.

1. Feladat. Adjunk meg az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterében bázist

$$(b) A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda = 2$$

Megoldás. Meg kell határoznunk a $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó U_2 alteret. Ehhez meg kell oldani az alábbi homogén lineáris egyenletrendszert:

$(A - \lambda \cdot E_3) \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$. Jelen esetben a mátrixa:

$$(A - \lambda \cdot E_3) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Lépcsős alakra hozzuk:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Innen leolvasható, hogy $x_2 = x_3$, és x_1 és x_3 szabad ismeretlen. Így kapjuk, hogy a keresett sajátaltér:

$$U_2 = \{(x_1, x_3, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Ebben az sajátaltérben bázis az $(1,0,0), (0,1,1)$ vektorrendszer.

Oldjuk meg a (d) feladatrészt is.

2. Feladat. Adjunk meg az A mátrix λ sajátértékéhez tartozó sajátalterében bázist

$$(d) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}; \quad \lambda = 2$$

Megoldás. Meg kell határoznunk a $\lambda = 2$ sajátértékhez tartozó U_2 alteret. Ehhez meg kell oldani az alábbi homogén lineáris egyenletrendszert:

$(A - \lambda \cdot E_3) \cdot \mathbf{x}^T = \mathbf{0}^T$. Jelen esetben a mátrixa:

$$(A - \lambda \cdot E_3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Lépcsős alakra hozzuk:

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Innen leolvasható, hogy $x_1 = -x_3$, és $x_2 = -x_3$ és x_3 szabad ismeretlen. Így kapjuk, hogy a keresett sajátaltér:

$$U_2 = \{(-x_3, -x_3, x_3) \mid x_1, x_3 \in \mathbb{R}\}.$$

Ebben az sajátaltérben bázis a $(-1, -1, 1)$ vektorrendszer.