

LINEÁRIS ALGEBRA

6.2(d,e) feladat

(mátrixok sajátértékeinek meghatározása)

Bolyai Intézet

2020

Definíció

Az A ($n \times n$)-es mátrixnak **sajátértéke** a λ valós szám, ha van olyan $v \in \mathbb{R}^n$, $v \neq \mathbf{0}$ vektor, melyre $A \cdot v^T = \lambda v^T$ teljesül.

Definíció

Az A ($n \times n$)-es mátrixnak **sajátvektora** a $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ vektor, ha van olyan λ valós szám, melyre $A \cdot v^T = \lambda v^T$ teljesül.

A *sajátérték* és a *sajátvektor* összetartozó fogalmak, mindkettőt ugyanannak az egyenletnek a segítségével definiáljuk (*sajátérték-egyenlet*).

Azt mondjuk, hogy v a λ sajátértékhez tartozó sajátvektor.

(A v^T jelölés arra utal, hogy a v vektort itt oszlopvektorként – azaz, sorvektor transzponáltjaként – írjuk fel.)

Az egyenleten egy kis átalakítást végrehajtva (ld. előadás, 16. dia), az alábbi vektoregyenlethez jutunk:

$$(A - \lambda \cdot E_n) \cdot v^T = \mathbf{0}^T,$$

ami egy n ismeretlenes lineáris egyenletrendszernek felel meg (az ismeretlenek a v vektor koordinátái).

A fenti definíciókban a λ sajátérték és a v sajátvektor kölcsönös *létezését* tételeztük fel, ez pedig az adott egyenletrendszer tekintetében a *megoldás* létezését jelenti (mégpedig nemtriviális megoldását, azaz, ahol a v vektor nem nulla).

Ilyen megoldás pontosan akkor létezik, ha az egyenletrendszer együttható-mátrixának determinánsa nulla:

$$|A - \lambda \cdot E_n| = 0$$

(v.ö. az előadás idevágó tételével).

A determináns kifejtése a λ ismeretlen n -edfokú polinomját szolgáltatja (ezt nevezzük az A mátrix *karakterisztikus polinomjának*); a sajátértékek tehát ennek a polinomnak a gyökei.

A sajátértékek meghatározása így ennek a polinomegyenletnek a megoldását jelenti.

Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

A megoldás első lépéseként felírjuk a karakterisztikus polinomot:

$$\left| \begin{pmatrix} 3 & 1 & -5 \\ 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -5 \\ 0 & 3-\lambda & -5 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix},$$

ahol kifejtjük a determinánst (az első oszlop szerint):

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -5 \\ 0 & 3-\lambda & -5 \\ 0 & 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda) \cdot \begin{vmatrix} 3-\lambda & -5 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = \\
 = (3-\lambda)[(3-\lambda)(-2-\lambda) - (-5)] = (3-\lambda)(-6 - 3\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 5) = \\
 = (3-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1).$$

A polinomegyenletünk tehát a következő:

$$(3-\lambda)(\lambda^2 - \lambda - 1) = 0.$$

6.2(d) Feladat

Az egyenlet bal oldalán egy szorzat áll, amelyből az első zárójeles kifejezést nullává téve kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{\lambda_1 = 3.}}$$

A második zárójel egy másodfokú egyenletet szolgáltat:

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0,$$

amelyre a megoldóképletet alkalmazva:

$$\lambda_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - (-4)}}{2}$$

kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{\lambda_2 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}}} \quad \text{és} \quad \underline{\underline{\lambda_3 = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}}}.$$

Határozzuk meg az alábbi mátrix sajátértékeit:

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & -5 \\ -1 & -6 & -9 \\ 1 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

A megoldás menete itt is ugyanaz, mint az előbb.

A karakterisztikus polinom:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -4 & -5 \\ -1 & -6 - \lambda & -9 \\ 1 & 4 & 7 - \lambda \end{vmatrix}.$$

A determináns kifejtése az első oszlop szerint:

$$\begin{aligned}
 & (1 - \lambda) \cdot \begin{vmatrix} -6 - \lambda & -9 \\ 4 & 7 - \lambda \end{vmatrix} - (-1) \cdot \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ 4 & 7 - \lambda \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -4 & -5 \\ -6 - \lambda & -9 \end{vmatrix} = \\
 & = (1 - \lambda)[(-6 - \lambda)(7 - \lambda) + 36] + [-4(7 - \lambda) + 20] + [36 - 5(6 + \lambda)] = \\
 & = (1 - \lambda)(-42 + 6\lambda - 7\lambda + \lambda^2 + 36) + (-28 + 4\lambda + 20) + \\
 & \quad + (36 - 30 - 5\lambda) = \\
 & = (1 - \lambda)(\lambda^2 - \lambda - 6) + (4\lambda - 8) + (-5\lambda + 6) = \\
 & = \lambda^2 - \lambda - 6 - \lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda - \lambda - 2 = \\
 & = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + 4\lambda - 8.
 \end{aligned}$$

A polinomegyenletünk ezúttal egy harmadfokú egyenlet:

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 - 4\lambda + 8 = 0.$$

A gyanútlan feladatmegoldót ez meghökkenetheti, azonban ha kellően elszántak vagyunk, és alaposan szemügyre vesszük az egyenletet, észrevehetjük, hogy ez az egyenlet speciális alakú.

Ehhez nézzük meg külön-külön a baloldalt álló négytagú összeg első és második két tagját:

$$(\lambda^3 - 2\lambda^2) + (-4\lambda + 8).$$

Máris feltűnik, hogy mindkét zárójeles kifejezés szorzattá alakítható:

$$\lambda^2(\lambda - 2) - 4(\lambda - 2).$$

A közös tényező kiemelésével polinomegyenletünk bal oldalát most már könnyűszerrel szorzattá alakíthatjuk:

$$(\lambda^2 - 4)(\lambda - 2) = 0.$$

Ebből pedig kapjuk, hogy

$$\underline{\underline{\lambda_{1,2} = \pm 2}}, \quad \text{és} \quad \underline{\underline{\lambda_3 = 2}}.$$

(A karakterisztikus polinomnak tehát +2 a kétszeres gyöke.)