

# Lineáris algebra

## 6.2 a) és b) feladat

Bolyai Intézet

2020. április 11.

## Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(a)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

## Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(a)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda - t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

## Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(a)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda - t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 \cdot (-2)$$

## Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(a)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda - t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 \cdot (-2) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 2$$

## Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(a)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda - t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} &= (1 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 \cdot (-2) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 2 = \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 3 \end{aligned}$$

## Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(a)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda - t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} &= (1 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 \cdot (-2) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 2 = \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 3 \end{aligned}$$

Keressük a következő kifejezés gyökeit:  $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$

## Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

$$(a) \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda - t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} &= (1 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 \cdot (-2) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 2 = \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 3 \end{aligned}$$

Keressük a következő kifejezés gyökeit:  $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$



## Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(a)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda - t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} &= (1 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 \cdot (-2) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 2 = \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 3 \end{aligned}$$

Keressük a következő kifejezés gyökeit:  $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

## Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

(a)  $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda - t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 \\ 1 & 1 - \lambda \end{vmatrix} &= (1 - \lambda)(1 - \lambda) - 1 \cdot (-2) = 1 - 2\lambda + \lambda^2 + 2 = \\ &= \lambda^2 - 2\lambda + 3 \end{aligned}$$

Keressük a következő kifejezés gyökeit:  $\lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2}$$

Mivel a gyökjel alatt negatív szám áll, ezért a mátrixnak nincsen valós sajátértéke.

## Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

## Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda - t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

## Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda - t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix}$$

## Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda - t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(1 - \lambda) - (-1) \cdot (-2)$$

## Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda - t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} &= (2 - \lambda)(1 - \lambda) - (-1) \cdot (-2) = \\ &= 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 2 \end{aligned}$$

## Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda - t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} &= (2 - \lambda)(1 - \lambda) - (-1) \cdot (-2) = \\ &= 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 3\lambda \end{aligned}$$



## Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda - t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} &= (2 - \lambda)(1 - \lambda) - (-1) \cdot (-2) = \\ &= 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 3\lambda \end{aligned}$$

Keressük a következő kifejezés gyökeit:  $\lambda^2 - 3\lambda = 0$

## Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda - t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} &= (2 - \lambda)(1 - \lambda) - (-1) \cdot (-2) = \\ &= 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 3\lambda \end{aligned}$$

Keressük a következő kifejezés gyökeit:  $\lambda^2 - 3\lambda = 0$ , azaz  $\lambda(\lambda - 3) = 0$ .

## Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrixok sajátértékeit:

$$(b) \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{kivonunk } \lambda - t]{\text{a főátló elemeiből}} \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{pmatrix}$$

Számoljuk ki az így kapott mátrix determinánsát:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -2 & 1 - \lambda \end{vmatrix} &= (2 - \lambda)(1 - \lambda) - (-1) \cdot (-2) = \\ &= 2 - 3\lambda + \lambda^2 - 2 = \lambda^2 - 3\lambda \end{aligned}$$

Keressük a következő kifejezés gyökeit:  $\lambda^2 - 3\lambda = 0$ , azaz  $\lambda(\lambda - 3) = 0$ .

Tehát a mátrix két sajátértéke a  $\lambda_1 = 0$  és a  $\lambda_2 = 3$ .