

A 6.1-es feladat a) és c) részének megoldása (bázis megadása homogén lineáris egyenletrendszer megoldásterében)

Lineáris algebra

2020

Homogén lineáris egyenletrendszeren olyan lineáris egyenletrendszert értünk, melynek a (megszokott értelemben vett) jobb oldali konstansai 0-k. Egy ilyen n -ismeretlenes egyenletrendszer megoldáshalmazát – mint n -komponensű vektorok egy halmazát – tekintve azt mondhatjuk, hogy a megoldáshalmaz zárt a vektorok összeadására, illetve a skalárral való szorzásra. Tehát a megoldáshalmaz altér $\mathbb{R}^n$ -ben, és így beszélhetünk megoldástérrel (= megoldáshalmaz ami altér).

6.1-es feladat a), c) megoldásának menete

A 6.1-es feladatban homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásterében fogunk megadni bázist.

Először megoldjuk az egyenletrendszereket Gauss-elimináció vagy EBT használatával. Ezután felírjuk az általános megoldást, és megnézzük hány szabad változónk van, legyen ezek száma k . Ezután a k -dimenziós standard bázist (lásd Vektorterek (2.), 16. dia) felhasználva fogunk megadni bázist a megoldástérben.

Az 6.1-es a) feladat megoldása (Gauss)

6.1-es feladat

Adjunk meg bázist a következő homogén lineáris egyenletrendszerek megoldásterében.

a)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 \quad \quad - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Először Gauss-eliminációval számolunk; miután a jobb oldali konstansok 0-k, és bármilyen elemi átalakítást végzünk, a konstansok továbbra is 0-k maradnak, ezért az elimináció során nem muszáj kiírunk a jobb oldali konstans oszlopot. (De ne feledkezzünk el róla!)

Az 6.1-es a) feladat megoldása (Gauss)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & -3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Elérkeztünk a lépcsős alakhoz. Ezután írjuk fel az általános megoldást, azaz a megoldásteret; x_1, x_2 kötött változó, x_3 szabad változó ($k = 1$).

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ -2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow x_2 = \frac{x_3}{2}$$

$$\Rightarrow x_1 = -x_2 + 2x_3 = \frac{3x_3}{2}$$

Így a megoldáster:

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = \frac{3x_3}{2}, x_2 = \frac{x_3}{2}, x_3 \in \mathbb{R}\} = \{(\frac{3x_3}{2}, \frac{x_3}{2}, x_3) \mid x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Az 6.1-es a) feladat megoldása (Gauss)

Láthatjuk, hogy minden megoldás $(\frac{3x_3}{2}, \frac{x_3}{2}, x_3)$ alakban írható fel, tehát a megoldástér bármely elemét meghatározhatjuk a $k = 1$ db szabad változó (x_3) megadásával. Ezért a megoldástér dimenziója a szabad változók száma (azaz most 1). Ekkor ha a k -dimenziós standard bázist írjuk be a szabad változók helyére, az garantálja nekünk, hogy bázist kapunk a megoldástérben. (Az 1-dimenziós standard bázis pedig az (1) , mint egyelemű vektorrendszer.)

$$\begin{array}{c|ccc} x_3 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 1 & \frac{3 \cdot 1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{array}$$

Tehát egy bázis: a $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 1)$ vektorrendszer.

Az 6.1-es a) feladat megoldása (EBT)

6.1-es feladat

a)

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ 2x_1 \quad \quad - 3x_3 = 0 \end{cases}$$

Most elemi bázistranszformációval számolunk; miután a jobb oldali konstansok 0-k, és minden táblázatban 0-k is maradnak, ezért nem muszáj kiírunk a konstans oszlopot. (De ne feledkezzünk el róla!)

0.	x_1	x_2	x_3	1.	x_2	x_3	2.	x_2
e_1	1^*	1	-2	x_1	1	-2	x_1	-3
e_2	1	-1	-1	e_2	-2	1^*	x_3	-2
e_3	2	0	-3	e_3	-2	1	e_3	0

Az 6.1-es a) feladat megoldása (EBT)

Nem tudunk generálóelemet választani, az EBT véget ért. Ezután írjuk fel az általános megoldást, azaz a megoldásteret; x_1, x_3 kötött változó, x_2 szabad változó ($k = 1$).

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 3x_2 \\ x_3 - 2x_2 = 0 \Rightarrow x_3 = 2x_2 \end{cases}$$

Így a megoldáster:

$$M = \{(x_1, x_2, x_3) \mid x_1 = 3x_2, x_3 = 2x_2, x_2 \in \mathbb{R}\} = \{(3x_2, x_2, 2x_2) \mid x_2 \in \mathbb{R}\}$$

Az 6.1-es a) feladat megoldása (EBT)

Láthatjuk, hogy minden megoldás $(3x_2, x_2, 2x_2)$ alakban írható fel, tehát a megoldástér bármely elemét meghatározhatjuk a $k = 1$ db szabad változó (x_2) megadásával. Ezért a megoldástér dimenziója a szabad változók száma (azaz most 1). Ekkor ha a k -dimenziós standard bázist írjuk be a szabad változók helyére, az garantálja nekünk, hogy bázist kapunk a megoldástérben. (Az 1-dimenziós standard bázis pedig az (1) , mint egyelemű vektorrendszer.)

$$\begin{array}{c|ccc} x_2 & x_1 & x_2 & x_3 \\ \hline 1 & 3 \cdot 1 & 1 & 2 \cdot 1 \end{array}$$

Tehát egy bázis: a $(3, 1, 2)$ vektorrendszer.

Az 6.1-es c) feladat megoldása (Gauss)

6.1-es feladat

c)

$$\begin{cases} x_1 & & & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Gauss-eliminációval számolunk:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Az 6.1-es c) feladat megoldása (Gauss)

Elérkeztünk a lépcsős alakhoz. Ezután írjuk fel az általános megoldást, azaz a megoldástér; x_1, x_2 kötött változó, x_3, x_4 szabad változó ($k = 2$).

$$\begin{cases} x_1 & & + x_4 = 0 & \Rightarrow x_1 = -x_4 \\ 2x_2 & + x_3 - x_4 = 0 & \Rightarrow x_2 = \frac{-x_3}{2} + \frac{x_4}{2} \end{cases}$$

Így a megoldástér:

$$M = \left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = -x_4, x_2 = -\frac{x_3}{2} + \frac{x_4}{2}, x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\} = \\ \left\{ \left(-x_4, -\frac{x_3}{2} + \frac{x_4}{2}, x_3, x_4 \right) \mid x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$$

Az 6.1-es c) feladat megoldása (Gauss)

Megint csak úgy határozzuk meg a megoldástér egy bázisát, hogy a k -dimenziós standard bázist írjuk be a szabad változók (x_3, x_4) helyére; ez a standard bázis most az $(1, 0), (0, 1)$ vektorrendszer (mert $k = 2$). Itt használjuk az előbbi eredményünket, miszerint a megoldástér bármely eleme előáll $(-x_4, -\frac{x_3}{2} + \frac{x_4}{2}, x_3, x_4)$ alakban.

x_3	x_4	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	-0	$-\frac{1}{2} + \frac{0}{2}$	1	0
0	1	-1	$-\frac{0}{2} + \frac{1}{2}$	0	1

Így a megoldástér egy bázisa: a $(0, -\frac{1}{2}, 1, 0), (-1, \frac{1}{2}, 0, 1)$ vektorrendszer.

Az 6.1-es c) feladat megoldása (EBT)

6.1-es feladat

c)

$$\begin{cases} x_1 & & & + & x_4 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 0 \end{cases}$$

Elemi bázistranszformációval számolunk:

0.	x_1	x_2	x_3	x_4	1.	x_2	x_3	x_4	2.	x_2	x_4
e_1	1^*	0	0	1	x_1	0	0	1	x_1	0	1
e_2	1	2	1	0	e_2	2	1^*	-1	x_3	2	-1
e_3	0	2	1	-1	e_3	2	1	-1	e_3	0	0

Az 6.1-es c) feladat megoldása (EBT)

Nem tudunk generálóelemet választani, az EBT véget ért. Ezután írjuk fel az általános megoldást, azaz a megoldástérét; x_1, x_3 kötött változó, x_2, x_4 szabad változó ($k = 2$).

$$\begin{cases} x_1 & & + & x_4 & = & 0 \Rightarrow x_1 = -x_4 \\ & x_3 & + & 2x_2 & - & x_4 & = & 0 \Rightarrow x_3 = -2x_2 + x_4 \end{cases}$$

Így a megoldástér:

$$M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \mid x_1 = -x_4, x_3 = -2x_2 + x_4, x_2, x_4 \in \mathbb{R}\} = \{(-x_4, x_2, -2x_2 + x_4, x_4) \mid x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

Az 6.1-es c) feladat megoldása (EBT)

Megint csak úgy határozzuk meg a megoldástér egy bázisát, hogy a k -dimenziós standard bázist írjuk be a szabad változók (x_2, x_4) helyére; ez a standard bázis most az $(1, 0), (0, 1)$ vektorrendszer (mert $k = 2$). Itt használjuk az előbbi eredményünket, miszerint a megoldástér bármely eleme előáll $(-x_4, x_2, -2x_2 + x_4, x_4)$ alakban.

x_2	x_4	x_1	x_2	x_3	x_4
1	0	-0	1	$-2 \cdot 1 + 0$	0
0	1	-1	0	$-2 \cdot 0 + 1$	1

Így a megoldástér egy bázisa: a $(0, 1, -2, 0), (-1, 0, 1, 1)$ vektorrendszer.