

LINEÁRIS ALGEBRA

5.9(a) feladat

(mátrix rangjának számítása egy valós paraméter függvényében)

Bolyai Intézet

2020

Definíció ["Vektorterek II" előadás]

Vektorrendszer **rangjának** nevezzük a maximális lineárisan független részrendszereinek közös elemszámát. Tehát a vektorrendszer rangja r , ha kiválasztható belőle r számú lineárisan független vektor, de $(r + 1)$ számú már nem.

Egy $k \times n$ -es mátrix sorai tekinthetők úgy is, mint n komponensű vektorok ("sorvektorok"); hasonlóképpen, a mátrix oszlopai is fel-foghatók, mint k komponensű oszlopvektorok.

Érdemes megjegyezni, hogy a **Rangszámtétel** alapján egy mátrix *sorvektorrendszerének rangja megegyezik oszlopvektorrendszerének rangjával*. (V.ö. 9. előadás: "Vektorterek (3.)", 15. dia)

Ennek alapján adódik a következő definíció.

Definíció

Egy **mátrix rangja** egyenlő a sorvektorrendszerének rangjával, illetve ezzel megegyező módon, oszlopvektorrendszerének rangjával.

5.9(a) Feladat

Határozzuk meg az alábbi mátrix rangját az a valós paraméter függvényében:

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Megoldás: Gauss-eliminációt használunk.

A Gauss-elimináció végrehajtása után a lépcsős alakban szereplő nem-0 sorok száma adja meg a mátrix rangját.

$$\begin{pmatrix} 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \\ 1 & 10 & -6 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 10 & -6 & 1 \\ 1 & a & -1 & 2 \\ 2 & -1 & a & 5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & -6 \\ 1 & 2 & a & -1 \\ 2 & 5 & -1 & a \end{pmatrix}$$

Itt az eliminációs lépések megkezdése előtt sor-, majd oszlopcserét hajtottunk végre, azért, hogy a paramétert tartalmazó mátrixelemek minél közelebb kerüljenek a mátrix jobb alsó sarkához; ennek előnye a számolás egyszerűbb voltában fog megmutatkozni a további lépések során.

Vegyük észre, hogy a csere jogosságát – mindkét esetben – az előzőekben megadott definíciók biztosítják.

(Az oszlopcsere azonban nem alkalmazható lineáris egyenletrendszer megoldásakor, hiszen ott az oszlopok egy-egy adott ismeretlen együtthatóit tartalmazzák!)

Az eliminációs lépések:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & -6 \\ 1 & 2 & a & -1 \\ 2 & 5 & -1 & a \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & -6 \\ 0 & 1 & a-10 & 5 \\ 0 & 3 & -21 & a+12 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 10 & -6 \\ 0 & 1 & a-10 & 5 \\ 0 & 0 & -3a+9 & a-3 \end{pmatrix}$$

Itt közvetlenül látszik, hogy ha $a = 3$, a nem csupa nullát tartalmazó sorok száma 2, egyébként pedig 3.

A rang tehát $a = 3$ esetén 2, $a \neq 3$ esetén pedig 3.

2. Megoldás: Elemi bázistranszformációt használunk.

Konkrét számmátrix esetén a következőképpen járunk el (v.ö. "Vektorterek II" előadás):

- A mátrixból egy EBT-táblázatot készítünk, majd elemi bázistranszformációt hajtunk végre, ameddig tudunk;
- A generáló elem oszlopát el lehet hagyni, sőt a sorokat is;
- A sorokba bevitt oszlopcímkék száma adja a mátrix rangját.

A jelen, paraméteres esetben az első pontban követett úton eljutunk egy olyan lépéshez, amikor már csak a paraméter konkrét vizsgálata útján tudjuk eldönteni, hogy milyen módon, és meddig tudunk továbbhaladni.

(Így a megoldásnak van egy első, rutinszerű szakasza, és egy második, már gondos megfontolásokat igénylő második szakasza.)

5.9(a) Feladat – Elemi bázistranszformáció

1.	u_1	u_2	u_3	u_4
e_1	1^*	a	-1	2
e_2	2	-1	a	5
e_3	1	10	-6	1

2.	u_2	u_3	u_4
e_2	$-1 - 2a$	$a + 2$	1^*
e_3	$10 - a$	-5	-1

3.	u_2	u_3
e_3	$9 - 3a$	$a - 3$

Tudunk-e innen továbbhaladni?

- Igen, és csakis akkor, ha $a \neq 3$. Ebben az esetben a következő lépésben egy üres táblázatot kapunk, úgy, hogy összességében az u_1 és u_4 oszlopot, valamint az u_2 , u_3 oszlopok valamelyikét vontuk be a bázisba. Ekkor tehát a rang 3.
- Ha viszont $a = 3$, akkor elakad az eljárás (hiszen 0 nem lehet generáló elem); így csak az u_1 , u_4 oszlopot tudtuk bevonni, ami azt jelenti, hogy a rang 2.