

Lineáris algebra

5.8. (a) és (b) feladat

Bolyai Intézet

2020. március 26.

Az 5.8. feladat mátrixok rangjával és a bennük megadható legnagyobb nem 0 értékű aldeterminánsok megadásával foglalkozik. A rangszámtétel alapján a mátrix sorrangja, oszloprangja és determinánssrangja megegyezik, amit a mátrix rangjának nevezünk. Jelölése: $r(A)$.

rangját.

1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját, valamint adjunk meg bennük maximális méretű nem 0 értékű aldeterminánst.

$$(a) A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Megoldás. Kétféleképpen is megoldhatjuk ezt a feladatot:

1. Gauss-elimináció segítségével lépcsős alakra hozzuk a mátrixot. A lépcsős alakban szereplő nem csupa 0 sorok száma adja meg a mátrix rangját. A maximális méretű nem nulla aldeterminánst pedig úgy kaphatjuk meg, ha a lépcsős alaknak megfelelő eredeti sorokat és oszlopokat megkeressük.
2. A mátrixon Elemi bázistranszformációt alkalmazunk. A generáló elem oszlopát el lehet hagyni, sőt akár a sorokat is! A bázisba bevitt oszlopvektorok száma adja meg a mátrix rangját. Az EBT-táblázat azt is megmutatja, hogy mely sorokat és oszlopokat lehet választanunk: amely rendre amely sorokból választottuk a generáló elemet.

Tehát a mátrix rangját ugyanúgy számoljuk, mint a vektorrendszer rangját. Az első módszerrel a mátrix sorrangját számoljuk ki, míg a második módszerrel a mátrix oszloprangját kapjuk meg, amelyek a fent említett rangszámtétel alapján egyenlőek. Oldjuk meg a feladatot először az első módszer segítségével.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A lépcsős alakban 1 darab nem-0 sor van, így a mátrix rangja 1, azaz $r(A)=1$. Most keressük meg a lépcsős alaknak megfelelő eredeti sort és oszlopot. (Mivel a rang 1, ezért csak 1-1 sort, illetve oszlopot keresünk.) Sorcserét nem hajtottunk végre az elimináció során, ezért az 1. sort keressük és az 1. oszlopot, ezért az 1. sor és 1. oszlop által meghatározott aldetermináns lesz maximális méretű nem nulla aldetermináns.

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad |1| = 1 \neq 0.$$

Az A mátrix alakja miatt tetszőleges sorcserét végrehajthattunk volna az elimináció során és ugyanilyen lépcsős alakot kaptunk volna. Így az eredeti mátrix bármely

sora lehetett volna a keresett sor amely meghatározza (a megfelelő oszloppal) a maximális méretű nem nulla értékű aldeterminánst. Ránézésre is láthatjuk, hogy van másik kettő ugyanilyen méretű nem nulla aldetermináns:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad |-1| = -1 \neq 0; \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad |2| = 2 \neq 0.$$

Oldjuk meg a feladatot a 2. módszerrel (elemi bázistranszformációval). Ne feledjünk, hogy a generáló elem sorát és oszlopát is elhagyhatjuk.

$$\begin{array}{c|ccc} 0. & a_1 & a_2 & a_3 \\ e_1 & 1^* & 0 & 0 \\ e_2 & -1 & 0 & 0 \\ e_3 & 2 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 1. & a_2 & a_3 \\ e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{array}$$

Az elemi bázistranszformáció 1 lépésből áll, így a bázisba 1 db oszlopvektort választottunk be (amelyikből a generáló elemet választottuk). A beválasztott oszlopvektorok száma megadja a mátrix rangját, ami tehát ebben a feladatban 1, így a maximális méretű nem nulla aldetermináns elsőrendű. Az elemi bázistranszformáció táblázatából kiolvassva megmondhatjuk mely sorok és oszlopok határozzák meg az aldeterminánst, amit keresünk.

$$\begin{array}{c|cc} 1. & a_2 & a_3 \\ e_2 & 0 & 0 \\ e_3 & 0 & 0 \end{array} \quad \text{Mivel az } a_1 \text{ került bele a bázisba, ezért az 1. oszlop választhatjuk, és}$$

az e_1 bázisvektor helyére került be, ezért az 1. sort választhatjuk. Tehát a keresett maximális méretű nem nulla aldeterminánst az 1. sor és 1. oszlop határozza meg.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad |1| = 1 \neq 0.$$

Láthatjuk, hogy ugyanazt az eredményt kaptuk A mátrix rangjára és ebben az esetben ugyanazt a maximális méretű nem nulla aldeterminánst határozta meg a két módszer. Azonban az elemi bázistranszformációban az első oszlopból akármelyik elemet választhattuk volna generáló elemnek, így láthatjuk, hogy bármelyik sort választhatjuk, amely meg fogja határozni (az első oszloppal) a maximális méretű nem nulla determinánst. Tehát megkaphatjuk az 1. módszernél megadott három megoldást.

Oldjuk meg a feladat (b) részét is.

2. Feladat. Számítsuk ki az alábbi mátrixok rangját, valamint adjunk meg bennük maximális méretű nem 0 értékű aldeterminánst.

$$(b) B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

Megoldás. Először oldjuk meg a feladatot az első módszer segítségével.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A lépcsős alakban 2 darab nem-0 sor van, tehát a mátrix rangja 2, azaz $r(A)=2$. Keressük meg a lépcsős alaknak megfelelő eredeti sorokat és oszlopokat, amelyek meghatározzák a maximális méretű nem nulla aldeterminánst. Sorcserét nem hajtottunk végre az elimináció során, ezért az 1. és 2. sorokat keressük, illetve az 1. és 3. oszlopokat, ezért a keresett aldeterminánst az 1., 2. sorok és 1., 3. oszlopok határozzák meg.

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & -1 & \color{red}{2} & 1 \\ \color{red}{-1} & 1 & \color{red}{1} & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0.$$

Oldjuk meg a feladatot a 2. módszerrel (elemi bázistranszformációval). Ne feledjük, hogy a generáló elem sorát és oszlopát is elhagyhatjuk.

0.	a_1	a_2	a_3	a_4	1.	a_2	a_3	a_4	2.	a_2	a_3
e_1	1^*	-1	2	1	e_2	0	3	1^*	e_3	0	0
e_2	-1	1	1	0	e_3	0	3	1	e_4	0	0
e_3	0	0	3	1	e_4	0	3	1			
e_4	1	-1	5	2							

Az elemi bázistranszformáció 2 lépésből áll, így a bázisba 2 db oszlopvektort választottunk be (amely oszlopokból a generáló elemeket választottuk). A beválasztott oszlopvektorok száma megadja a mátrix rangját, ami tehát ebben az esetben 2, így a maximális méretű nem nulla aldetermináns másodrendű. Az elemi bázistranszformáció táblázatából kiolvassva megmondhatjuk mely sorok és oszlopok határozzák meg az aldeterminánst, amit keresünk.

2.	a_2	a_3
e_3	0	0
e_4	0	0

Mivel az a_1 és a_4 került bele a bázisba, ezért az 1. és 4. oszlopot választhatjuk, és az e_1 és e_2 bázisvektor helyére kerültek be, ezért az 1. és 2. sort választhatjuk. Tehát a keresett maximális méretű nem nulla aldeterminánst az 1., 2. sorok és 1., 4. oszlopok határozzák meg.

$$\begin{pmatrix} \color{red}{1} & -1 & 2 & \color{red}{1} \\ \color{red}{-1} & 1 & 1 & \color{red}{0} \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Láthatjuk, hogy ugyanazt az eredményt kaptuk A mátrix rangjára. Azonban a maximális méretű nem nulla aldeterminánst nem egyezik, de mind a kettő jó megoldás. Tehát két különböző ilyen aldeterminánst is sikerült megadnunk.