

Koordinátasor

5.7 feladat

- **Vektorrendszer:** egyforma dimenziójú/méretű vektorok halmaza. Például $\{(1, -1), (4, 5), (1, 0)\}$ egy három vektorból álló kétdimenziós vektorrendszer.
- Vektorok **lineáris kombinációja:** az egyes vektorokat beszorozzuk valamilyen skalárral, és a kapott vektorokat összeadjuk. Például a fenti vektorok egy lineáris kombinációja:
$$0 \cdot (1, -1) + 10 \cdot (4, 5) + (-2) \cdot (1, 0) = (38, 50).$$
- Egy vektorrendszer **lineárisan független**, ha minden vektort **legfeljebb** egyféleképpen lehet előállítani a vektorrendszerbeli vektorok lineáris kombinációjaként. A fenti vektorrendszer nem ilyen, mert például a $(38, 50)$ vektornak van másmilyen előállítása is:
$$(-50) \cdot (1, -1) + 0 \cdot (4, 5) + 88 \cdot (1, 0) = (38, 50).$$
 (Tehát ez a vektorrendszer **lineárisan függő**.)

- Egy vektorrendszer **generátorrendszer**, ha minden (a, b) vektorrendszerrel megegyező dimenziójú) vektort **legalább** egyféleképpen elő lehet állítani a vektorrendszerbeli vektorok lineáris kombinációjaként. A fenti vektorrendszer ilyen, mert tetszőleges (a, b) vektor előáll úgy, hogy $(-b) \cdot (1, -1) + 0 \cdot (4, 5) + (a + b) \cdot (1, 0)$.
- Egy vektorrendszer **bázis** (pontosabban: bázisa $\mathbb{R}^n$ -nek, ahol n a vektorrendszer dimenziója), ha lineárisan független és generátorrendszer. Ez azt jelenti, hogy minden vektor **pontosan** egyféleképpen áll elő a vektorrendszerbeli vektorok lineáris kombinációjaként.
- Egy vektor **koordinátasorát** egy adott bázisban úgy kapjuk, hogy meghatározzuk azt a lineáris kombinációt, ami a bázis elemeiből előállítja a vektort, és ennek a lineáris kombinációnak az együtthatóit beírjuk egy vektorba.

5.7 c, megoldása

A következő egyenlet megoldását akarjuk meghatározni:

$$(2, 1, -1) = y_1 \cdot (-4, -2, 2) + y_2 \cdot (1, 2, 4) + y_3 \cdot (-1, 3, 9)$$

A jobb oldalon a műveleteket elvégezve:

$$(2, 1, -1) = (-4y_1 + y_2 - y_3, -2y_1 + 2y_2 + 3y_3, 2y_1 + 4y_2 + 9y_3)$$

Tehát:

$$\begin{aligned} 2 &= -4y_1 + y_2 - y_3 \\ 1 &= -2y_1 + 2y_2 + 3y_3 \\ -1 &= 2y_1 + 4y_2 + 9y_3 \end{aligned}$$

5.7 c, megoldása

A lineáris egyenletrendszert Gauss-eliminációval oldjuk meg:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 9 & -1 \end{array} \right)$$

Figyeljük meg, hogy ezt rögtön a feladatból leolvashattuk volna: a bázis vektorai kerülnek be a mátrix oszlopaiba, a célvektor pedig az extra oszlopba.

5.7 c, megoldása

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 1 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 9 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 1 \\ -4 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & 4 & 9 & -1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 \end{array} \right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 6 & 12 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -\frac{5}{3} & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

5.7 c, megoldása

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & -\frac{5}{3} & 1 \\ 0 & -3 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

Tehát a koordinátasor: $(-\frac{1}{2}, 0, 0)$. Aki észreveszi, hogy a célvektor és a bázis első vektora arányos, az megspórolhatja az egész számítást...

5.7 d, megoldása

Tanulva az előző példából, a feladatban szereplő vektorokat rögtön beírjuk oszloponként a mátrixba, és eliminálunk:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & 4 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 \end{array} \right)$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & -5 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right)$$

5.7 d, megoldása

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & -2 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

Tehát a koordinátasor $(3, -4, 2)$. Ellenőrizhetünk is:

$$(1, -1, 1) = 3 \cdot (1, -1, 3) + (-4) \cdot (2, -1, 4) + 2 \cdot (3, -1, 4)$$