

Lineáris algebra

5.6. (a) és (e) feladat

Bolyai Intézet

2020. március 19.

Először oldjuk meg az 5.6. feladat (a) részét.

1. Feladat. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér V alterének dimenzióját, valamint adjunk meg benne bázist.

(a) $V = [(1, -1, 1, 2), (1, 2, 1, 2), (-1, 0, 1, -2), (1, 3, 5, 2)]$

Megoldás. Legyenek $v_1 = (1, -1, 1, 2)$, $v_2 = (1, 2, 1, 2)$, $v_3 = (-1, 0, 1, -2)$, $v_4 = (1, 3, 5, 2)$.

Kétféleképpen is megoldhatjuk ezt a feladatot:

1. Elemi bázistranszformációval (vektorokat oszlopokba beírva) meghatározzuk, hogy (maximálisan) hány darab vektor vonható be a bázisba a v_1, v_2, v_3, v_4 vektorok közül. Ezen bázisba bevont vektorok bázist alkotnak a V altérben. A bevont vektorok száma megegyezik az altér dimenziójával. Így v_1, v_2, v_3, v_4 vektorok közül vett vektorokból álló bázist adunk, amelyeknek száma megadja az altér dimenzióját.
2. A generátorrendszer vektorait (v_1, v_2, v_3, v_4) beírjuk az A mátrix soraiba. A sorokon elemi átalakításokat végezve meghatározzuk az A mátrix lépcsős alakját. Az így kapott nem csupa 0-ból álló sorvektorok a V altér egy bázisát határozzák meg, ezek száma lesz az altér dimenziója.

Oldjuk meg a feladatot először az első módszer segítségével.

$$\begin{array}{c|cccc} 0. & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline e_1 & 1^* & 1 & -1 & 1 \\ e_2 & -1 & 2 & 0 & 3 \\ e_3 & 1 & 1 & 1 & 5 \\ e_4 & 2 & 2 & -2 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 1. & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline e_2 & 3 & -1^* & 4 \\ e_3 & 0 & 2 & 4 \\ e_4 & 0 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|cc} 2. & v_2 & v_4 \\ \hline e_3 & 6^* & 4 \\ e_4 & 0 & 0 \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 3. & v_4 \\ \hline e_4 & 0 \end{array}$$

Ebben a témában korábban tanult módszer segítségével "elhagyom" a generáló elem sorát és oszlopát is az elemi bázistranszformáció során. Amelyik vektor oszlopából választottam a generáló elemet azt a vektort vonom bele a bázisba. Itt v_1, v_3, v_2 vektorokat, ebben a sorrendben. Nulla elemet nem választhatok generáló elemnek, így a v_4 vektort már nem vonhatom bele. Tehát v_1, v_2, v_3 a V altér bázisát alkotják. A V altér dimenziója megegyezik a bázisának elemszámával, így az altér 3 dimenziós. (A vektorrendszer rangja is 3.)

Oldjuk meg a feladatot a 2. módszer szerint is.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 4 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A lépcsős alakban három darab nem csupa 0-ból álló sor van. Ezek a sorvektorok legyenek $u_1 = (1, 0, 0, 2)$, $u_2 = (0, 1, 0, 0)$, $u_3 = (0, 0, 1, 0)$. Ez a három vektor lineárisan független és bázist alkotnak V altérben. (A vektorrendszer rangja is 3.)

Most oldjuk meg a feladat (e) részét is.

2. Feladat. Határozzuk meg az $\mathbb{R}^4$ vektortér V alterének dimenzióját, valamint adjunk meg benne bázist.

(e) $V = [(1, 1, -1, 2), (1, 1, 0, 1), (1, 2, -1, 2), (1, 0, 1, 0), (1, 2, 3, 4)]$

Megoldás. Legyenek $v_1 = (1, 1, -1, 2)$, $v_2 = (1, 1, 0, 1)$, $v_3 = (1, 2, -1, 2)$, $v_4 = (1, 0, 1, 0)$, $v_5 = (1, 2, 3, 4)$.

Oldjuk meg a feladatot először az első módszer segítségével.

$$\begin{array}{c|ccccc} 0. & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline e_1 & 1^* & 1 & 1 & 1 & 1 \\ e_2 & 1 & 1 & 2 & 0 & 2 \\ e_3 & -1 & 0 & -1 & 1 & 3 \\ e_4 & 2 & 1 & 2 & 0 & 4 \end{array} \quad \begin{array}{c|cccc} 1. & v_2 & v_3 & v_4 & v_5 \\ \hline e_2 & 0 & 1^* & -1 & 1 \\ e_3 & 1 & 0 & 2 & 4 \\ e_4 & -1 & 0 & -2 & 2 \end{array} \quad \begin{array}{c|ccc} 2. & v_2 & v_4 & v_5 \\ \hline e_3 & 1^* & 2 & 4 \\ e_4 & -1 & -2 & 2 \end{array}$$

$$\begin{array}{c|cc} 3. & v_4 & v_5 \\ \hline e_4 & 0 & 6^* \end{array} \quad \begin{array}{c|c} 4. & v_4 \end{array}$$

Itt v_1, v_3, v_2, v_5 vektorokat vontuk be a bázisba, ebben a sorrendben. Tehát v_1, v_2, v_3, v_5 a V altér bázisát alkotják. A V altér dimenziója megegyezik a bázisának elemszámával, így az altér 4 dimenziós. (A vektorrendszer rangja is 4.)

Oldjuk meg a feladatot a 2. módszer szerint is.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A lépcsős alakban négy darab nem csupa 0-ból álló sor van. Ezek a sorvektorok legyenek $e_1 = (1, 0, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, 0)$, $e_3 = (0, 0, 1, 0)$, $e_4 = (0, 0, 0, 1)$. Ez a négy vektor lineárisan független és bázist alkotnak V altérben. (A vektorrendszer rangja is 4.)