

Lineáris algebra

5.5 a) feladat

Bolyai Intézet

2020. március 19.

Feladat

Az a paraméter függvényében döntsük el az alábbi vektorrendszerrel, hogy lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben.

(a) $(1, -4, 3, 2), (-1, 4, -2, -4), (3, -12, a, 10)$.

Feladat

Az a paraméter függvényében döntsük el az alábbi vektorrendszerrel, hogy lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben.

(a) $(1, -4, 3, 2), (-1, 4, -2, -4), (3, -12, a, 10)$.

Megoldás

3 vektor $\mathbb{R}^4$ vektortérben (4 komponensűek a vektorok)

Feladat

Az a paraméter függvényében döntsük el az alábbi vektorrendszeréről, hogy lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben.

(a) $(1, -4, 3, 2), (-1, 4, -2, -4), (3, -12, a, 10)$.

Megoldás

3 vektor $\mathbb{R}^4$ vektortérben (4 komponensűek a vektorok)



nem generátorrendszer

Feladat

Az a paraméter függvényében döntsük el az alábbi vektorrendszerrel, hogy lineárisan független, generátorrendszer, illetve bázis-e a megfelelő $\mathbb{R}^n$ vektortérben.

(a) $(1, -4, 3, 2), (-1, 4, -2, -4), (3, -12, a, 10)$.

Megoldás

3 vektor $\mathbb{R}^4$ vektortérben (4 komponensűek a vektorok)



nem generátorrendszer



nem bázis

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & -2 & -4 \\ 3 & -12 & a & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot(+1)} \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{\cdot(-3)} \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & -2 & -4 \\ 3 & -12 & a & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot(+1)} \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{\cdot(-3)} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-9 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot(-(a-9))} \\ \xleftarrow{+} \end{array} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & -2 & -4 \\ 3 & -12 & a & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot(+1)} \xrightarrow{\cdot(-3)} \\ \leftarrow + \\ \leftarrow + \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-9 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot(-(a-9))} \\ \leftarrow + \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ -1 & 4 & -2 & -4 \\ 3 & -12 & a & 10 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot(+1)} \\ \xleftarrow{+} \\ \xleftarrow{\cdot(-3)} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & a-9 & 4 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{\cdot(-(a-9))} \\ \xleftarrow{+} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & ? \end{pmatrix}$$

$$? = 4 + (-2) \cdot (-(a-9)) = 4 + 2 \cdot (a-9) = 4 + 2a - 18 = 2a - 14$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2a - 14 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2a - 14 \end{pmatrix}$$

Definíció (Vektorrendszer rangja)

Vektorrendszer rangjának nevezzük a lépcsős alakban a (nem csupa 0) sorok számát.

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2a - 14 \end{pmatrix}$$

Definíció (Vektorrendszer rangja)

Vektorrendszer rangjának nevezzük a lépcsős alakban a (nem csupa 0) sorok számát.

$$2a - 14 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2a - 14 \end{pmatrix}$$

Definíció (Vektorrendszer rangja)

Vektorrendszer rangjának nevezzük a lépcsős alakban a (nem csupa 0) sorok számát.

$$2a - 14 = 0$$

$$a = 7$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2a - 14 \end{pmatrix}$$

Definíció (Vektorrendszer rangja)

Vektorrendszer rangjának nevezzük a lépcsős alakban a (nem csupa 0) sorok számát.

$$2a - 14 = 0$$

$$a = 7$$

Ekkor a vektorrendszer rangja $= 2 \neq 3 =$ eredeti darabszám

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2a - 14 \end{pmatrix}$$

Definíció (Vektorrendszer rangja)

Vektorrendszer rangjának nevezzük a lépcsős alakban a (nem csupa 0) sorok számát.

$$2a - 14 = 0$$

$$a = 7$$

Ekkor a vektorrendszer rangja $= 2 \neq 3 =$ eredeti darabszám



Függő

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2a - 14 \end{pmatrix}$$

Definíció (Vektorrendszer rangja)

Vektorrendszer rangjának nevezzük a lépcsős alakban a (nem csupa 0) sorok számát.

$$2a - 14 = 0$$

$$a = 7$$

Ekkor a vektorrendszer rangja $= 2 \neq 3 =$ eredeti darabszám



Függő

Különben független.

- Ha $a = 7$, akkor a vektorrendszer függő, nem generátorrendszer, nem bázis.

- Ha $a = 7$, akkor a vektorrendszer függő, nem generátorrendszer, nem bázis.
- Ha $a \neq 7$, akkor a vektorrendszer független, nem generátorrendszer, nem bázis.