

Az 5.4-es feladat megoldása [c), e), h)]

A feladat megoldásához a következő tételre lesz szükségünk:

Tétel (Lin. függetlenség, generátorr., bázis, rang)

Legyen V n -dimenziós vektortér és $v_1, \dots, v_k \in V$ vektorrendszer, melynek rangja r . Ekkor a következők érvényesek:

- $r \leq n, k$;
- *a vektorrendszer pontosan akkor lineárisan független, ha $r = k$;*
- *a vektorrendszer pontosan akkor generátorrendszere V -nek, ha $r = n$;*
- *a vektorrendszer pontosan akkor bázisa V -nek, ha $r = k = n$.*

Az 5.4-es c) feladat megoldása (Gauss)

5.4-es feladat

Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek rangját, és döntsük el, hogy lineárisan függetlenek, generátorrendszerek, illetve bázisok-e az $\mathbb{R}^4$ vektortérben. c) $(1, -1, 2, 1), (1, 0, 1, 2), (-1, 2, -3, 1)$;

Először Gauss-eliminációval számolunk: a vektorokat berakjuk egy mátrix soraiba, és azon Gauss-eliminálunk.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Eljutottunk a lépcsős alakhoz, a rang a megmaradt vektorok (azaz a mátrix "nem csupa-0" sorainak) száma, tehát 3.

Az 5.4-es c) feladat megoldása (Gauss)

Ekkor használjuk az első dián lévő tételt. Három vektorunk van, tehát $k = 3$. A vektoraink egy 4-dimenziós vektortér elemei (ez legkönnyebben a vektorok hosszából látszik), tehát $n = 4$. Az előbb kiszámoltuk a rangot: $r = 3$; ezek után a tétel azt mondja, hogy

- (a rang maximum 4)
- a vektorrendszer lineárisan független, hiszen $r = 3 = 3 = k$;
- a vektorrendszer nem generátorrendszer hiszen $r = 3 \neq 4 = n$;
- a vektorrendszer nem bázis, hiszen $r = 3 \neq 4 = n$ (avagy mert nem generátorrendszer);

Az 5.4-es c) feladat megoldása (EBT)

5.4-es feladat

c) $(1, -1, 2, 1), (1, 0, 1, 2), (-1, 2, -3, 1);$

Most elemi bázistranszformációval számolunk: a vektorokat berakjuk egy mátrix **oszlopaiba**, és azon EBT-t hajtunk végre, most nem csak a bevitt "a"-k oszlopát hagyjuk el, hanem a sorát is.

0.	a_1	a_2	a_3	1.	a_2	a_3	2.	a_3	3.
e_1	1^*	1	-1	e_2	1^*	1	e_3	0	e_3
e_2	-1	0	2	e_3	-1	-1	e_4	1^*	
e_3	2	1	-3	e_4	1	2			
e_4	1	2	1						

Nem tudunk további generáloelemet választani, a rang azon vektorok száma, amiket sikerült bevinnünk előre, azaz 3. (Avagy az utolsó táblázat száma, ha 0-val kezdjük az elején.)

Az 5.4-es c) feladat megoldása (EBT)

Ezután megint használjuk az első dián található tételt, és innentől fogva ugyan az a megoldás, mint ami a 3. dián található. (Lineárisan független, nem generátorrendszer, nem bázis.)

Az 5.4-es e) feladat megoldása (Gauss)

5.4-es feladat

Határozzuk meg az alábbi vektorrendszerek rangját, és döntsük el, hogy lineárisan függetlenek, generátorrendszerek, illetve bázisok-e az $\mathbb{R}^4$ vektortérben. e) $(1, 1, -1, 2), (1, 1, 0, 1), (1, 2, -1, 2), (1, 0, 1, 0), (1, 2, 3, 4)$;

Gauss-eliminációval (a kiindulási mátrix sorai a vektoraink):

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 \end{pmatrix} \sim$$

Az 5.4-es e) feladat megoldása (Gauss)

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Eljutottunk a lépcsős alakhoz, a rang a megmaradt vektorok (azaz a mátrix “nem csupa-0” sorainak) száma, tehát 4.

Ekkor megint használjuk az első dián lévő tételt. Most $k = 5$, $n = 4$ és $r = 4$. Ezek után a tétel azt mondja, hogy

- a vektorrendszer nem lineárisan független, hiszen $r = 4 \neq 5 = k$;
- a vektorrendszer generátorrendszer hiszen $r = 4 = 4 = n$;
- a vektorrendszer nem bázis, hiszen $r = 4 \neq 5 = n$ (avagy mert lineárisan függő);

Az 5.4-es e) feladat megoldása (EBT)

5.4-es feladat

(e) $(1, 1, -1, 2), (1, 1, 0, 1), (1, 2, -1, 2), (1, 0, 1, 0), (1, 2, 3, 4);$

EBT-vel, a mátrix oszlopai a vektoraink.

0.	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	1.	a_2	a_3	a_4	a_5
e_1	1^*	1	1	1	1	e_2	0	1^*	-1	1
e_2	1	1	2	0	2	e_3	1	0	2	4
e_3	-1	0	-1	1	3	e_4	-1	0	-2	2
e_4	2	1	2	0	4					
2.	a_2	a_4	a_5			3.	a_4	a_5		
e_3	1^*	2	4			e_4	0	6^*		
e_4	-1	-2	2						4.	a_4

Nem tudunk további generáloelemet választani, a rang azon vektorok száma, amiket sikerült bevinnünk előre, azaz 4. (Avagy az utolsó táblázat száma, ha 0-val kezdjük az elején.)

Az 5.4-es e) feladat megoldása (EBT)

Ezután megint használjuk az első dián található tételt, és innentől fogva ugyan az a megoldás, mint ami a 7. dián található. (Lineárisan függő, generátorrendszer, nem bázis.)

Az 5.4-es h) feladat megoldása (csak EBT)

5.4-es feladat

h) $(5, -2, -8, 4)$, $(3, 1, 1, -2)$, $(6, 1, -1, -4)$, $(3, 3, 7, 1)$

EBT-vel, a mátrix oszlopai a vektoraink.

0.	a_1	a_2	a_3	a_4	1.	a_1	a_3	a_4
e_1	5	3	6	3	e_1	11	3	-6
e_2	-2	1*	1	3	e_3	-6	-2*	4
e_3	-8	1	-1	7	e_4	0	-2	7
e_4	4	-2	-4	1				

2.	a_1	a_4	3.	a_4	4.	
e_1	2*	0	e_4	3*		
e_4	6	3				

Nem tudunk további generálóelemet választani, tehát ezen vektorrendszer rangja 4.

Az 5.4-es h) feladat megoldása (csak EBT)

Most $k = 4$, $n = 4$ és $r = 4$. Ezek után a tétel szerint

- a vektorrendszer lineárisan független, hiszen $r = 4 = 4 = k$;
- a vektorrendszer generátorrendszer hiszen $r = 4 = 4 = n$;
- a vektorrendszer bázis, hiszen $r = k = n = 4$ (avagy mert lineárisan független és generátorrendszer);