

Lineáris függőség, generátorrendszerek

5.3 feladat

- **Vektorrendszer:** egyforma dimenziójú/méretű vektorok halmaza. Például $\{(1, -1), (4, 5), (1, 0)\}$ egy három vektorból álló kétdimenziós vektorrendszer.
- Vektorok **lineáris kombinációja:** az egyes vektorokat beszorozzuk valamilyen skalárral, és a kapott vektorokat összeadjuk. Például a fenti vektorok egy lineáris kombinációja:
$$0 \cdot (1, -1) + 10 \cdot (4, 5) + (-2) \cdot (1, 0) = (38, 50).$$
- Egy vektorrendszer **lineárisan független**, ha minden vektort **legfeljebb** egyféleképpen lehet előállítani a vektorrendszerbeli vektorok lineáris kombinációjaként. A fenti vektorrendszer nem ilyen, mert például a $(38, 50)$ vektornak van másmilyen előállítása is:
$$(-50) \cdot (1, -1) + 0 \cdot (4, 5) + 88 \cdot (1, 0) = (38, 50).$$
 (Tehát ez a vektorrendszer **lineárisan függő**.)

- Egy vektorrendszer **generátorrendszer**, ha minden (a vektorrendszerrel megegyező dimenziójú) vektort **legalább** egyféleképpen elő lehet állítani a vektorrendszerbeli vektorok lineáris kombinációjaként. A fenti vektorrendszer ilyen, mert tetszőleges (a, b) vektor előáll úgy, hogy $(-b) \cdot (1, -1) + 0 \cdot (4, 5) + (a + b) \cdot (1, 0)$.
- Egy vektorrendszer **bázis** (pontosabban: bázisa $\mathbb{R}^n$ -nek, ahol n a vektorrendszer dimenziója), ha lineárisan független és generátorrendszer. Ez azt jelenti, hogy minden vektor **pontosan** egyféleképpen áll elő a vektorrendszerbeli vektorok lineáris kombinációjaként.

Hogyan oldjuk meg az 5.3 feladattípust?

Lineáris függőség:

- Ha egy vektorrendszer tartalmazza a nullvektort, vagy tartalmaz két arányos sort, akkor lineárisan függő.
- Ha egy vektorrendszer elemszáma nagyobb a dimenziószámánál, akkor lineárisan függő.
- Ha egy vektorrendszer csak egy vektort tartalmaz, és az nem a nullvektor, akkor lineárisan független.
- Ha egy vektorrendszer csak két vektort tartalmaz, egyik sem a nullvektor, és a két vektor nem arányos, akkor a vektorrendszer lineárisan független.
- Ha a fentiek nem döntenek el a függőséget, akkor eliminációs eljárásra van szükség (lásd az 5.4 feladatot).

Hogyan oldjuk meg az 5.3 feladattípust?

Generátorrendszeriség:

- Ha a vektorrendszer elemszáma kisebb a dimenziószámánál, akkor nem generátorrendszer.
- Ha a vektorrendszer kétdimenziós, és tartalmaz két nem arányos vektort, akkor generátorrendszer.
- Ha a vektorrendszer elemszáma megegyezik a dimenziószámával, és lineárisan függő, akkor nem generátorrendszer.
- Ha a fentiek nem döntenek el a generátorrendszeriséget, akkor eliminációs eljárásra van szükség (lásd az 5.4 feladatot).

5.3 c, megoldása

- A vektorrendszer lineárisan függő, mert két arányos vektort tartalmaz $((3, 6, -3) = \frac{3}{2} \cdot (2, 4, -2))$.
- A vektorrendszer nem generátorrendszer, mert elemszáma (2) kisebb, mint a dimenziószáma (3).
- A vektorrendszer nem bázis, mert lineárisan függő.

- A vektorrendszer lineárisan független, mert két vektort tartalmaz, egyik sem a nullvektor, és nem is arányosak.
- A vektorrendszer generátorrendszer, mert kétdimenziós, és tartalmaz két nem arányos vektort.
- A vektorrendszer bázis, mert lineárisan független és generátorrendszer.