

Lineáris algebra

5.2 c) és d) feladat

Bolyai Intézet

2020. március 16.

Feladat

Döntsük el, hogy a v vektor eleme-e az $\mathbb{R}^3$ vektortér U alterének.

(c) $v = (1, 2, 1)$, $U = [(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)]$.

Feladat

Döntsük el, hogy a v vektor eleme-e az $\mathbb{R}^3$ vektortér U alterének.

(c) $v = (1, 2, 1)$, $U = [(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)]$.

Használjuk a Vektorterek (1.) előadás anyagának 14. diáján szereplő *észrevételt*:

Feladat

Döntsük el, hogy a v vektor eleme-e az $\mathbb{R}^3$ vektortér U alterének.

(c) $v = (1, 2, 1)$, $U = [(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)]$.

Használjuk a Vektorterek (1.) előadás anyagának 14. diáján szereplő *észrevételt*:

Ha U altere a V vektortérnek, akkor tetszőleges $v_1, \dots, v_n \in U$ vektorok tetszőleges lineáris kombinációja is U -beli vektor.

Feladat

Döntsük el, hogy a v vektor eleme-e az $\mathbb{R}^3$ vektortér U alterének.

(c) $v = (1, 2, 1)$, $U = [(1, 1, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1)]$.

Használjuk a Vektorterek (1.) előadás anyagának 14. diáján szereplő *észrevételt*:

Ha U altere a V vektortérnek, akkor tetszőleges $v_1, \dots, v_n \in U$ vektorok tetszőleges lineáris kombinációja is U -beli vektor.

Definíció (Lineáris kombináció)

A V vektortér $v_1, \dots, v_n$ vektorainak az $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ skalárokkal képzett lineáris kombinációja az $\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_n \cdot v_n \in V$ vektor.

A mi feladatunkban $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1)$.
A kérdés, hogy létezik-e olyan $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ számhármass, amire
 $\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2 + \gamma \cdot v_3 = v$.

A mi feladatunkban $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1)$.
A kérdés, hogy létezik-e olyan $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ számhármass, amire
 $\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2 + \gamma \cdot v_3 = v$.

Behelyettesítés után:

$$\alpha \cdot (1, 1, 0) + \beta \cdot (0, 1, 1) + \gamma \cdot (1, 0, 1) = (1, 2, 1)$$

A mi feladatunkban $v_1 = (1, 1, 0)$, $v_2 = (0, 1, 1)$, $v_3 = (1, 0, 1)$.
A kérdés, hogy létezik-e olyan $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ számhármass, amire
 $\alpha \cdot v_1 + \beta \cdot v_2 + \gamma \cdot v_3 = v$.

Behelyettesítés után:

$$\alpha \cdot (1, 1, 0) + \beta \cdot (0, 1, 1) + \gamma \cdot (1, 0, 1) = (1, 2, 1)$$

Próbáljuk megtalálni ezeket a skalárokat GeoGebra segítségével
(kattints a képre):



Kérdés: Hogyan szorzunk vektort skalárral?

Kérdés: Hogyan szorzunk vektort skalárral?

Válasz: Minden koordinátáját megszorozzuk vele.

Kérdés: Hogyan szorzunk vektort skalárral?

Válasz: Minden koordinátáját megszorozzuk vele.

$$(\alpha, \alpha, 0) + (0, \beta, \beta) + (\gamma, 0, \gamma) = (1, 2, 1)$$

Kérdés: Hogyan szorzunk vektort skalárral?

Válasz: Minden koordinátáját megszorozzuk vele.

$$(\alpha, \alpha, 0) + (0, \beta, \beta) + (\gamma, 0, \gamma) = (1, 2, 1)$$

Kérdés: Hogyan adunk össze vektorokat?

Kérdés: Hogyan szorzunk vektort skalárral?

Válasz: Minden koordinátáját megszorozzuk vele.

$$(\alpha, \alpha, 0) + (0, \beta, \beta) + (\gamma, 0, \gamma) = (1, 2, 1)$$

Kérdés: Hogyan adunk össze vektorokat?

Válasz: Megfelelő koordinátákat összeadjuk.

Kérdés: Hogyan szorzunk vektort skalárral?

Válasz: Minden koordinátáját megszorozzuk vele.

$$(\alpha, \alpha, 0) + (0, \beta, \beta) + (\gamma, 0, \gamma) = (1, 2, 1)$$

Kérdés: Hogyan adunk össze vektorokat?

Válasz: Megfelelő koordinátákat összeadjuk.

$$(\alpha + \gamma, \alpha + \beta, \beta + \gamma) = (1, 2, 1)$$

Kérdés: Hogyan szorzunk vektort skalárral?

Válasz: Minden koordinátáját megszorozzuk vele.

$$(\alpha, \alpha, 0) + (0, \beta, \beta) + (\gamma, 0, \gamma) = (1, 2, 1)$$

Kérdés: Hogyan adunk össze vektorokat?

Válasz: Megfelelő koordinátákat összeadjuk.

$$(\alpha + \gamma, \alpha + \beta, \beta + \gamma) = (1, 2, 1)$$

Kérdés: Mikor egyenlő két vektor?

Kérdés: Hogyan szorzunk vektort skalárral?

Válasz: Minden koordinátáját megszorozzuk vele.

$$(\alpha, \alpha, 0) + (0, \beta, \beta) + (\gamma, 0, \gamma) = (1, 2, 1)$$

Kérdés: Hogyan adunk össze vektorokat?

Válasz: Megfelelő koordinátákat összeadjuk.

$$(\alpha + \gamma, \alpha + \beta, \beta + \gamma) = (1, 2, 1)$$

Kérdés: Mikor egyenlő két vektor?

Válasz: Megfelelő koordinátái megegyeznek.

Kérdés: Hogyan szorzunk vektort skalárral?

Válasz: Minden koordinátáját megszorozzuk vele.

$$(\alpha, \alpha, 0) + (0, \beta, \beta) + (\gamma, 0, \gamma) = (1, 2, 1)$$

Kérdés: Hogyan adunk össze vektorokat?

Válasz: Megfelelő koordinátákat összeadjuk.

$$(\alpha + \gamma, \alpha + \beta, \beta + \gamma) = (1, 2, 1)$$

Kérdés: Mikor egyenlő két vektor?

Válasz: Megfelelő koordinátái megegyeznek.

$$\left. \begin{array}{rcl} \alpha & + & \gamma = 1 \\ \alpha & + & \beta = 2 \\ \beta & + & \gamma = 1 \end{array} \right\}$$

Kérdés: Hogyan szorzunk vektort skalárral?

Válasz: Minden koordinátáját megszorozzuk vele.

$$(\alpha, \alpha, 0) + (0, \beta, \beta) + (\gamma, 0, \gamma) = (1, 2, 1)$$

Kérdés: Hogyan adunk össze vektorokat?

Válasz: Megfelelő koordinátákat összeadjuk.

$$(\alpha + \gamma, \alpha + \beta, \beta + \gamma) = (1, 2, 1)$$

Kérdés: Mikor egyenlő két vektor?

Válasz: Megfelelő koordinátái megegyeznek.

$$\left. \begin{array}{rcl} \alpha & + & \gamma = 1 \\ \alpha & + & \beta = 2 \\ \beta & + & \gamma = 1 \end{array} \right\}$$

Szuper! Ezt már ismerjük! A feladatunk egy lineáris egyenletrendszer megoldása!

Mi elemi bázistranszformációval fogjuk megoldani a feladatot.

Mi elemi bázistranszformációval fogjuk megoldani a feladatot.

0.	α	β	γ	$\mathbf{v}$
e_1	1^*	0	1	1
e_2	1	1	0	2
e_3	0	1	1	1

Mi elemi bázistranszformációval fogjuk megoldani a feladatot.

0.	α	β	γ	$\mathbf{v}$	1.	β	γ	$\mathbf{v}$
e_1	1^*	0	1	1	α	0	1	1
e_2	1	1	0	2	e_2	1^*	-1	1
e_3	0	1	1	1	e_3	1	1	1

Mi elemi bázistranszformációval fogjuk megoldani a feladatot.

0.	α	β	γ	$\mathbf{v}$	1.	β	γ	$\mathbf{v}$	2.	γ	$\mathbf{v}$
e_1	1^*	0	1	1	α	0	1	1	α	1	1
e_2	1	1	0	2	e_2	1^*	-1	1	β	-1	1
e_3	0	1	1	1	e_3	1	1	1	e_3	2^*	0

Mi elemi bázistranszformációval fogjuk megoldani a feladatot.

0.	α	β	γ	$\mathbf{v}$	1.	β	γ	$\mathbf{v}$	2.	γ	$\mathbf{v}$	3.	$\mathbf{v}$
e_1	1^*	0	1	1	α	0	1	1	α	1	1	α	1
e_2	1	1	0	2	e_2	1^*	-1	1	β	-1	1	β	1
e_3	0	1	1	1	e_3	1	1	1	e_3	2^*	0	γ	0

Mi elemi bázistranszformációval fogjuk megoldani a feladatot.

0.	α	β	γ	$\mathbf{v}$	1.	β	γ	$\mathbf{v}$	2.	γ	$\mathbf{v}$	3.	$\mathbf{v}$
$\mathbf{e}_1$	1^*	0	1	1	α	0	1	1	α	1	1	α	1
$\mathbf{e}_2$	1	1	0	2	$\mathbf{e}_2$	1^*	-1	1	β	-1	1	β	1
$\mathbf{e}_3$	0	1	1	1	$\mathbf{e}_3$	1	1	1	$\mathbf{e}_3$	2^*	0	γ	0

Tehát az $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0$ skalárok a megfelelőek.

Mi elemi bázistranszformációval fogjuk megoldani a feladatot.

0.	α	β	γ	$\mathbf{v}$	1.	β	γ	$\mathbf{v}$	2.	γ	$\mathbf{v}$	3.	$\mathbf{v}$
$\mathbf{e}_1$	1^*	0	1	1	α	0	1	1	α	1	1	α	1
$\mathbf{e}_2$	1	1	0	2	$\mathbf{e}_2$	1^*	-1	1	β	-1	1	β	1
$\mathbf{e}_3$	0	1	1	1	$\mathbf{e}_3$	1	1	1	$\mathbf{e}_3$	2^*	0	γ	0

Tehát az $\alpha = 1, \beta = 1, \gamma = 0$ skalárok a megfelelőek.

Megoldás: A $\mathbf{v}$ vektor eleme az $\mathbb{R}^3$ vektortér U alterének, mert $1 \cdot (1, 1, 0) + 1 \cdot (0, 1, 1) + 0 \cdot (1, 0, 1) = (1, 2, 1)$.

Egy újabb észrevétel

Vizsgáljuk meg jobban az U altér megadott vektorai és a lineáris egyenletrendszerből felírt táblázat közötti összefüggést:

Egy újabb észrevétel

Vizsgáljuk meg jobban az U altér megadott vektorai és a lineáris egyenletrendszerből felírt táblázat közötti összefüggést:

$$v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 0, 1)$$

0.	α	β	γ	$\mathbf{v}$
e_1	1	0	1	1
e_2	1	1	0	2
e_3	0	1	1	1

Egy újabb észrevétel

Vizsgáljuk meg jobban az U altér megadott vektorai és a lineáris egyenletrendszerből felírt táblázat közötti összefüggést:

$$v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (0, 1, 1), v_3 = (1, 0, 1)$$

0.	α	β	γ	$\mathbf{v}$
e_1	1	0	1	1
e_2	1	1	0	2
e_3	0	1	1	1

Tipp: Ha már elég magabiztosak vagyunk, akkor a feladatot kezdhethetjük azzal, hogy az altér megadott vektorait beírjuk a táblázat (vagy Gauss-elimináció esetén a bővített mátrix) oszlopaiba.

Feladat

Döntsük el, hogy a v vektor eleme-e az $\mathbb{R}^3$ vektortér U alterének.

(d) $v = (1, 2, 1)$, $U = [(1, 1, 1), (1, 0, -1), (2, 1, 0)]$.

Feladat

Döntsük el, hogy a v vektor eleme-e az $\mathbb{R}^3$ vektortér U alterének.

(d) $v = (1, 2, 1)$, $U = [(1, 1, 1), (1, 0, -1), (2, 1, 0)]$.

Oldjuk meg Gauss-eliminációval. Használjuk ki a 6. dián leírtakat.

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \sim & \end{array}$$

Feladat

Döntsük el, hogy a v vektor eleme-e az $\mathbb{R}^3$ vektortér U alterének.

(d) $v = (1, 2, 1)$, $U = [(1, 1, 1), (1, 0, -1), (2, 1, 0)]$.

Oldjuk meg Gauss-eliminációval. Használjuk ki a 6. dián leírtakat.

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) \sim \end{array}$$

Feladat

Döntsük el, hogy a v vektor eleme-e az $\mathbb{R}^3$ vektortér U alterének.

(d) $v = (1, 2, 1)$, $U = [(1, 1, 1), (1, 0, -1), (2, 1, 0)]$.

Oldjuk meg Gauss-eliminációval. Használjuk ki a 6. dián leírtakat.

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \sim & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) & \sim \\ \sim & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \end{array}$$

Feladat

Döntsük el, hogy a v vektor eleme-e az $\mathbb{R}^3$ vektortér U alterének.

(d) $v = (1, 2, 1)$, $U = [(1, 1, 1), (1, 0, -1), (2, 1, 0)]$.

Oldjuk meg Gauss-eliminációval. Használjuk ki a 6. dián leírtakat.

$$\begin{array}{cccc} v_1 & v_2 & v_3 & v \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) & \sim & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & 0 \end{array} \right) & \sim \\ & & \sim & \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array} \right) \end{array}$$

Megoldás: Az ellentmondó sorból az következik, hogy nincsenek ilyen skalárok, tehát a v vektor nem eleme az $\mathbb{R}^3$ vektortér U alterének.

Nézzük meg ezt a feladatot is GeoGebrával. A skalárok változtatásával a kapott vektor nyomvonalát követhetjük figyelemmel. Ha már elég sűrűn vannak a nyomvonalak forgassuk meg az ábrát. Mit veszünk észre? A GeoGebra megnyitásához kattints a képre!



Na és a végtelen?

Ismert, hogy bármely lineáris egyenletrendszernek vagy nincsen vagy pontosan 1 vagy végtelen sok megoldása van. Az előzőekben láthattunk példát az első kettő esetre.

Na és a végtelen?

Ismert, hogy bármely lineáris egyenletrendszernek vagy nincsen vagy pontosan 1 vagy végtelen sok megoldása van. Az előzőekben láthattunk példát az első kettő esetre.

Ha végtelen megoldása van, akkor végtelen sok jó választásunk van a skalárok megadására. Példa adásához válasszuk a szabad ismeretleneket 0-nak, majd ezek segítségével határozzuk meg a kötött ismeretleneket.

Na és a végtelen?

Ismert, hogy bármely lineáris egyenletrendszernek vagy nincsen vagy pontosan 1 vagy végtelen sok megoldása van. Az előzőekben láthattunk példát az első kettő esetre.

Ha végtelen megoldása van, akkor végtelen sok jó választásunk van a skalárok megadására. Példa adásához válasszuk a szabad ismeretleneket 0-nak, majd ezek segítségével határozzuk meg a kötött ismeretleneket.

Erre a feladatra a Vektorterek (1.) előadás anyagának 24. diáján láthatsz egy mintafeladatot.