

4.1. a)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = ?$$

1. Gauss - eliminációval:

$$\begin{aligned} & \textcircled{2} \left( \begin{array}{cc|cc} & A & E_2 & \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{/:3} \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \xrightarrow{+} \\ & \rightarrow \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \right) \\ & \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{E_2} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{A^{-1}} \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

2. Elemi bázistranszformációval:

$$\begin{array}{c|cc} & v_1 & v_2 \\ \hline e_1 & 1 & -1 \\ e_2 & 2 & 1^* \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} & v_1 & e_2 \\ \hline e_1 & 3^* & 1 \\ v_2 & 2 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} & e_1 & e_2 \\ \hline v_1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ v_2 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

1. választunk egy  $a^* \neq 0$  elemet:

$$\begin{array}{c|c} & v_j \\ \hline e_i & a^* \end{array}$$

2. kicseréljük  $e_i$ -t és  $v_j$ -t

3.  $a^*$  helyére:  $\frac{1}{a^*}$

4.  $a^*$  sorában: osztunk  $a^*$ -gal

5.  $a^*$  oszlopában: osztunk  $-a^*$ -gal

6. a többi elemet a téglalapszabállyal határozzuk meg:

$$\begin{array}{cc} b & a^* \\ d & c \end{array}$$

$$d \text{ helyére: } d - \frac{b \cdot c}{a^*}$$

EBT-vel másképp:

$$\begin{array}{c|cc} & v_1 & v_2 \\ \hline e_1 & 1 & -1^* \\ e_2 & 2 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} & v_1 & e_1 \\ \hline v_2 & -1 & -1 \\ e_2 & 3^* & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} & e_2 & e_1 \\ \hline v_2 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ v_1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} & e_1 & e_2 \\ \hline v_2 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ v_1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{array} \rightarrow \begin{array}{c|cc} & e_1 & e_2 \\ \hline v_1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ v_2 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{array}$$

(A sorokat, oszlopokat sorba kell rendezni)

3. A képlettel:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-2) = 3$$

$|A| \neq 0$ , ezért  $\exists A^{-1}$ .

$$A^{-1} = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^T = \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$