
LINEÁRIS ALGEBRA

(KÖZGAZDÁSZOKNAK)

10A104

FELADATOK A GYAKORLATRA (4.)

2019/2020. TAVASZI FÉLÉV

MÁTRIX INVERZE, MÁTRIXEGYENLETEK, LEONTIEF MODELL

4.1. Feladat. Számítsuk ki a következő mátrixok inverzét.

$$\begin{array}{lll} \text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, & \text{(b)} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}, & \text{(c)} \begin{pmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.4 & 0.7 \end{pmatrix}, \\ \text{(d)} \begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}, & \text{(e)} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, & \text{(f)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}. \end{array}$$

MEGOLDÁS. (a) $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/3 & 1/3 \\ -2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$

(b) a $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$ mátrixnak nincs inverze,

(c) $\begin{pmatrix} 0.4 & -0.2 \\ -0.4 & 0.7 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 3.5 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$

(d) $\begin{pmatrix} 3 & -4 & 5 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -5 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -8 & 29 & -11 \\ -5 & 18 & -7 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix},$

(e) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -\frac{4}{5} & 1 & \frac{2}{5} \\ -\frac{3}{5} & 1 & \frac{4}{5} \end{pmatrix},$

(f) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & 5 & 5 \\ 1 & -2 & 4 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -18 & 12 & -5 & -4 \\ -2 & 1 & 0 & -1 \\ 11 & -7 & 3 & 2 \\ -5 & 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$

4.2. Feladat. Oldjuk meg a következő mátrixegyenleteket.

$$\text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}; \quad \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix};$$

$$\text{(c)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(d)} X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\text{(e)} X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad \text{(f)} X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

MEGOLDÁS. (a) Nincs megoldás; (b) nincs megoldás;

(c) $\begin{pmatrix} x_{1,1} & x_{1,2} & x_{1,3} \\ x_{2,1} & x_{2,2} & x_{2,3} \\ x_{1,1} - 2x_{2,1} - 2 & x_{1,2} - 2x_{2,2} + 1 & x_{1,3} - 2x_{2,3} + 1 \\ -3x_{1,1} + 5x_{2,1} + 5 & 5x_{2,2} - 3x_{1,2} & -3x_{1,3} + 5x_{2,3} - 1 \end{pmatrix} (x_{1,1}, x_{1,2}, x_{1,3}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{2,3} \in \mathbb{R});$

(d) $\begin{pmatrix} x_{1,1} & (3x_{1,1} - 3)/5 & (-x_{1,1} - 4)/5 & 2 \\ x_{2,1} & 3x_{2,1}/5 & 1 - x_{2,1}/5 & 0 \\ x_{3,1} & 3x_{3,1}/5 & 1 - x_{3,1}/5 & -1 \end{pmatrix} (x_{1,1}, x_{2,1}, x_{3,1} \in \mathbb{R});$

(e) nincs megoldás;

(f) $\begin{pmatrix} 10 & 5 & -2 \\ 5 & 3 & 0 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

4.3. Feladat. Az $A = \begin{pmatrix} 0.4 & 0.1 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$ mátrix egy két ágazatra bontott gazdaság ráfordítási mátrixa. Döntsük el, hogy működőképes-e a gazdaság, valamint állapítsuk meg, hogy mekkora bruttó kibocsátás tartozik az $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ vektorral megadott nettó kibocsátáshoz. Vizsgáljuk meg, hogy a $(2 \ 3)$ árvektorral számolva mely ágazatok lesznek nyereségesek. Ha a gazdaság működőképes, de nem nyereséges mindkét ágazat, akkor adjunk meg olyan árvektort, hogy mindkettő nyereséges legyen.

MEGOLDÁS. A bruttó kibocsátás vektora: $(E_2 - A)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8/3 \\ 6 \end{pmatrix}$. Mivel $(2 \ 3) \cdot (E_2 - A) = (-0.6 \ 1.6)$, ezért a második ágazat nyereséges, az első pedig veszteséges. Ha az árvektort például $(3 \ 2)$ -nek választjuk, mindkét ágazat nyereséges lesz.

4.4. Feladat. Ugyanaz, mint az előző feladatban, de a következő mátrixokra, nettó kibocsátásokra, illetve árvektorokra:

(a) $\begin{pmatrix} 0 & 0.2 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(3 \ 3)$;

(b) $\begin{pmatrix} 0.8 & 0 \\ 0.5 & 0.5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$, $(4 \ 3)$;

(c) $\begin{pmatrix} 0.3 & 3 \\ 0.19 & 0.2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(10 \ 38)$;

(d) $\begin{pmatrix} 0.3 & 3 \\ 0.18 & 0.2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$, $(10 \ 38)$.

MEGOLDÁS. (a) A bruttó kibocsátás vektora: $\begin{pmatrix} 10.25 \\ 16.25 \end{pmatrix}$. Mindkét ágazat nyereséges.

(b) A bruttó kibocsátás vektora: $\begin{pmatrix} 15 \\ 29 \end{pmatrix}$. Az első ágazat veszteséges, a második nyereséges. Például a $(4 \ 1)$ árvektorral mindkét ágazat nyereséges.

(c) A gazdaság nem működőképes, így nincs értelme a bruttó kibocsátásnak. A profitvektor $(-0.22 \ 0.4)$.

(d) A bruttó kibocsátás vektora: $\begin{pmatrix} 490 \\ 114 \end{pmatrix}$. Mindkét ágazat nyereséges.

4.5. Feladat. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás.

(a) Ha egy invertálható mátrix minden eleme egész szám, akkor inverzének minden eleme is egész szám. **(Hamis)**

(b) Ha A és B azonos méretű invertálható mátrixok, akkor $A + B$ is invertálható. **(Hamis)**

(c) Ha A és B azonos méretű invertálható mátrixok, akkor AB is invertálható. **(Igaz)**

(d) Ha egy mátrix invertálható, akkor a transzponáltja is invertálható. **(Igaz)**

(e) Az $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}$ mátrixegyenletnek van megoldása. **(Hamis)**

(f) Az $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$ mátrixegyenletnek van megoldása. **(Igaz)**

(g) Ha A és B azonos méretű négyzetes mátrixok, valamint A invertálható mátrix, akkor az $AX = B$ mátrixegyenletnek van megoldása. **(Igaz)**

(h) Ha A és B azonos méretű négyzetes mátrixok, akkor az $AX = B$ mátrixegyenletnek van megoldása. **(Hamis)**

(i) Legyen E a (3×3) -as egységmátrix. Ekkor bármely A (3×3) -as mátrixra az $AX = E$ mátrixegyenletnek van megoldása. **(Hamis)**

(j) Ha A egy működőképes gazdaság ráfordítási mátrixa és $\mathbf{v}^T$ a nettó kibocsátás, akkor $(E - A)^{-1} \mathbf{v}^T$ a bruttó kibocsátás. **(Igaz)**

(k) Ha A egy működőképes gazdaság ráfordítási mátrixa és $\mathbf{v}^T$ a nettó kibocsátás, $\mathbf{w}^T$ pedig a bruttó kibocsátás, akkor v komponensei nem nagyobbak, mint w komponensei. **(Igaz)**

(l) Ha A egy működőképes gazdaság ráfordítási mátrixa, akkor bármely v árvektor esetén az összes ágazat nyereséges. **(Hamis)**

- (ly) Ha A egy működőképes gazdaság ráfordítási mátrixa, akkor van olyan $\mathbf{v}$ árvektor, amelyre az összes ágazat nyereséges. (Hamis)
- (m) Ha A egy gazdaság ráfordítási mátrixa és $\mathbf{v}$ az árvektor, akkor $\mathbf{v} - \mathbf{v}A$ a profitvektor. (Igaz)

A 4.6-13. Feladatokban a megadott négy válaszból csak az egyik helyes, döntsük el, melyik.

4.6. Feladat. A és B azonos méretű invertálható mátrixok. Melyik NEM feltétlenül invertálható az alábbiak közül?

- (a) A^2 (b) AB^{-1} (c) $(AB)^{-1}$ (d) $A - B$

MEGOLDÁS. (d)

4.7. Feladat. A és B azonos méretű négyzetes mátrixok. Melyik mátrixegyenlet esetén fordulhat elő, hogy nincs megoldása az alábbiak közül?

- (a) $AX = A$ (b) $AX = AB$ (c) $AX = B^2$ (d) $AX = 0$

MEGOLDÁS. (c)

4.8. Feladat. Egy négyzetes mátrix elemei pozitív egész számok. Mikor mondhatjuk biztosan, hogy a mátrix inverzében csupa egész szám áll?

- (a) Ha a mátrix determinánsa 1. (b) Ha a mátrix determinánsa 0.
(c) Ha a mátrix determinánsa pozitív. (d) Az előzőek közül egyik sem.

MEGOLDÁS. (a)

4.9. Feladat. A egy négyzetes mátrix. Az alábbi feltételek közül melyikből NEM következik, hogy A nemelfajuló?

- (a) $(A^{-1})^{-1} = A$.
(b) Az $AX = B$ mátrixegyenlet minden A -val azonos méretű B esetén megoldható.
(c) A^T invertálható.
(d) A felülről trianguláris.

MEGOLDÁS. (d)

4.10. Feladat. Tegyük fel, hogy egy gazdaság ráfordítási mátrixában minden elem kisebb 1-nél. Melyik állítás igaz feltétlenül a gazdaságra? (Megjegyzés: árvektorban nem lehetnek negatív számok.)

- (a) Működőképes.
(b) Van olyan árvektor, ami mellett van veszteséges ágazat.
(c) Van olyan árvektor, ami mellett van nyereséges ágazat.
(d) Tetszőleges nemnulla nettó kibocsátáshoz végtelen bruttó kibocsátás tartozik.

MEGOLDÁS. (c)

4.11. Feladat. Tegyük fel, hogy egy gazdaság ráfordítási mátrixában minden elem nagyobb 1-nél. Melyik állítás NEM feltétlen igaz a gazdaságra? (Megjegyzés: az árvektorban nem lehetnek negatív számok.)

- (a) Nem működőképes.
(b) Bármely árvektor mellett van veszteséges ágazat.
(c) Van olyan árvektor, ami mellett van nyereséges ágazat.
(d) Tetszőleges nemnulla nettó kibocsátáshoz végtelen bruttó kibocsátás tartozik.

MEGOLDÁS. (c)

4.12. Feladat. Tegyük fel, hogy egy gazdaság úgy változik meg, hogy ráfordítási mátrixában minden elem nő. Melyik állítás igaz? (Megjegyzés: árvektorban nem lehetnek negatív számok.)

- (a) Ha a gazdaság működőképes volt, akkor az is maradt.

- (b) Amennyiben az árvektor nem változott, legalább egy komponensében megnövekedett a profitvektor.
 (c) Amennyiben minden ár csökkent, legalább egy komponensében megnövekedett a profitvektor.
 (d) Ugyanakkora nettó kibocsátáshoz nagyobb bruttó kibocsátás fog tartozni.

MEGOLDÁS. (d)

4.13. Feladat. Tegyük fel, hogy egy gazdaság ráfordítási mátrixa, valamint az egyes ágazatokhoz tartozó árak is fixek. Az alábbiak közül melyik feltétel a legjobb a gazdaság „egészsége” szempontjából? (Megjegyzés: árvektorban nem lehetnek negatív számok.)

- (a) A gazdaság működőképes.
 (b) A profitvektor összes komponense pozitív.
 (c) Semelyik ágazat sem veszteséges.
 (d) Minden nettó kibocsátáshoz véges bruttó kibocsátás tartozik.

MEGOLDÁS. (b)

[■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■]

NEHEZEBB FELADATOK

4.14. Feladat. Adjuk meg az $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix inverzét.

4.15. Feladat. Határozzuk meg, hogy milyen x valós számok esetén invertálható az $A = \begin{pmatrix} x & -1 & 1 \\ 1 & -2 & x \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ mátrix, valamint adjuk is meg az inverzét (természetesen x függvényében).

4.16. Feladat. Legyen A $(n \times n)$ -es invertálható mátrix. Igazoljuk, hogy az A mátrix inverzének kiszámítása során fellépő generáló elemek szorzatának abszolútértéke megegyezik A determinánsának abszolútértékével.

4.17. Feladat. Egy gazdaság ráfordítási mátrixa: $\begin{pmatrix} 0.2 & 0.1 & 0.3 \\ 0.3 & 0.4 & 0.3 \\ 0.1 & 0.3 & 0.6 \end{pmatrix}$. Tegyük fel, hogy az egyes ágazatokban előállított termékek ára: 10, 15, illetve 5 Ft. Mely ágazatok nyereségesek, illetve veszteségesek? Próbáljunk meghatározni olyan árakat, amelyek mellett a gazdaságban nem lesz veszteséges ágazat.

4.18. Feladat. Az x valós paraméter mely értékei esetén lesz az $A = \begin{pmatrix} 0.2 & x \\ 0.4 & 0.5 \end{pmatrix}$ mátrix egy működőképes gazdaság ráfordítási mátrixa?

4.19. Feladat. Az x valós paraméter mely értékei esetén lesz az $A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 & x \\ 0.4 & 0.2 & 0.4 \\ 0.1 & 0 & 0.6 \end{pmatrix}$ mátrix egy működőképes gazdaság ráfordítási mátrixa?

4.20. Feladat. Egy működésképtelen gazdaság ráfordítási mátrixa: $A = \begin{pmatrix} 0.5 & 0.8 \\ 0.7 & 0.7 \end{pmatrix}$. A gazdaságot modernizálni próbáljuk: a mátrix bármely elemének 1-gyel történő módosításának a költsége 1 milliárd Ft. Hogyan lehet a legolcsóbban elérni, hogy a gazdaság már éppen működőképes legyen?