
LINEÁRIS ALGEBRA

(KÖZGAZDÁSZOKNAK)

10A104

FELADATOK A GYAKORLATRA (2.)

2019/2020. TAVASZI FÉLÉV

DETERMINÁNSOK

2.1. Feladat. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix};$

(b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix};$

(c) $\begin{vmatrix} -0.6 & 0.5 \\ 0.4 & -0.3 \end{vmatrix}.$

MEGOLDÁS. (a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3$; (b) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$; (c) $\begin{vmatrix} -0.6 & 0.5 \\ 0.4 & -0.3 \end{vmatrix} = -0.02.$

2.2. Feladat. Írjuk fel az alábbi determinánsok kifejtését a megadott soruk/oszlopuk szerint.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix}, 2. \text{ sor};$

(b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}, 3. \text{ oszlop}.$

MEGOLDÁS. (a) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix};$

(b) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \cdot (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}.$

2.3. Feladat. Nullázzuk ki a *-gal megjelölt elemek sorát/oszlopát az adott elem segítségével az alábbi determinánsokban.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1^* & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \text{ oszlop};$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2^* & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}, \text{ sor}.$

MEGOLDÁS. (a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1^* & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix};$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -2^* & -2 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & -4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}.$

2.4. Feladat. Számítsuk ki az alábbi determinánsok értékét.

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix};$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix};$

(c) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ -6 & 3 & 5 \\ 9 & 4 & 3 \end{vmatrix};$

(d) $\begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix};$

(e) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \end{vmatrix};$

(f) $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -4 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix};$

(g) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix};$

(h) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & -4 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$

MEGOLDÁS. (a) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$; (b) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 8$; (c) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 4 \\ -6 & 3 & 5 \\ 9 & 4 & 3 \end{vmatrix} = -552$;

$$(d) \begin{vmatrix} -1 & -2 & 3 & 1 \\ -4 & 5 & 7 & 0 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \\ -3 & 4 & 7 & 1 \end{vmatrix} = 16; (e) \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 4 & -1 \end{vmatrix} = 10; (f) \begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 1 & 2 & 3 \\ -2 & 2 & -4 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 15;$$

$$(g) \begin{vmatrix} 2 & -3 & 2 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ -2 & 1 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -6; (h) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & 3 & 3 & 4 & 5 \\ -2 & 3 & -4 & -5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -24.$$

2.5. Feladat. Adjuk meg az x valós paraméter értékét úgy, hogy az alábbi determináns értéke 0, illetve 30 legyen:

$$(a) \begin{vmatrix} -1 & x & x \\ -2 & 2 & x+5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(b) \begin{vmatrix} -1 & x & x-1 \\ -2 & x-2 & x+3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix};$$

$$(c) \begin{vmatrix} x-1 & 1 & x-1 \\ -2 & x-2 & 3 \\ x-1 & 2 & -x+1 \end{vmatrix}.$$

MEGOLDÁS. (a) $d = \begin{vmatrix} -1 & x & x \\ -2 & 2 & x+5 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = x^2 + x + 10$, ezért

$d = 0$ nem lehetséges,

$$d = 30 \iff x = -5 \text{ vagy } x = 4;$$

$$(b) d = \begin{vmatrix} -1 & x & x-1 \\ -2 & x-2 & x+3 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 8 + 4x, \text{ ezért}$$

$$d = 0 \iff x = -2,$$

$$d = 30 \iff x = 11/2;$$

$$(c) d = \begin{vmatrix} x-1 & 1 & x-1 \\ -2 & x-2 & 3 \\ x-1 & 2 & -x+1 \end{vmatrix} = -2x^3 + 8x^2 - 19x + 13, \text{ ezért}$$

$$d = 0 \iff x = 1,$$

$$d = 30 \iff x = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt[3]{9\sqrt{10099} - 887}}{2^{2/3}} - \frac{25}{\sqrt[3]{2(9\sqrt{10099} - 887)}} + 4 \right) \approx -0.672381909259812819377.$$

2.6. Feladat. Döntsük el, hogy igaz vagy hamis az állítás.

- (a) Ha egy determináns értéke 0, akkor két sora megegyezik, vagy arányos. (Hamis)
- (b) Ha egy egész számokból álló determináns értéke páros, akkor minden eleme páros. (Hamis)
- (c) Ha egy egész számokból álló determináns értéke páros, akkor van páros eleme. (Hamis)
- (d) Ha egy determináns két sorát felcseréljük, akkor értéke változatlan marad. (Hamis)
- (e) Ha egy egész számokból álló determináns egy sorában csak páros számok vannak, akkor az értéke páros. (Igaz)
- (f) Egész számokból álló determináns értéke is egész szám. (Igaz)
- (g) Bármely azonos méretű négyzetes A és B mátrixra $|A + B| = |A| + |B|$. (Hamis)
- (h) Bármely A négyzetes mátrix esetén $|A^T| = |A|$. (Igaz)
- (i) Bármely A négyzetes mátrix esetén $|A^2| = |A|^2$. (Igaz)
- (j) Bármely A négyzetes mátrix esetén $|A| = |-A|$. (Hamis)
- (k) Ha egy mátrix minden eleme racionális szám, akkor a mátrix determinánsa is racionális szám. (Igaz)

- (l) Ha egy mátrix minden eleme irracionális szám, akkor a mátrix determinánsa is irracionális szám.
(Hamis)

A 2.7-17. Feladatokban a megadott négy válaszból csak az egyik helyes, döntsük el, melyik.

2.7. Feladat. Bármely (a, b) és (c, d) síkbeli helyvektor esetén a két vektor által kifeszített paralelogramma területe...

- (a) $|ad - bc|$. (b) $ad - bc$. (c) $bc - ad$. (d) $|ab - cd|$.

MEGOLDÁS. (a)

2.8. Feladat. A (100×100) -as egység mátrix 2. sorának 3. eleméhez tartozó alldeterminánsának az értéke...

- (a) 1. (b) -1 . (c) 0. (d) $(-1)^{100}$.

MEGOLDÁS. (c)

2.9. Feladat. A $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ determináns minden adjungált alldeterminánsának értéke...

- (a) pozitív. (b) nemnegatív. (c) negatív. (d) nempozitív.

MEGOLDÁS. (d)

2.10. Feladat. Egy (4×4) -es determinánst kifejtettünk valamelyik sora vagy oszlopa szerint, majd az így kapott (3×3) -as determinánsok mindegyikét kifejtettük valamelyik soruk vagy oszlopuk szerint. Hány (2×2) -es determináns szerepel az így kapott összegben? (Minden összeadandót leírtunk, azokat is, amelyek értéke 0.)

- (a) 4. (b) 7. (c) 6. (d) 12.

MEGOLDÁS. (d)

2.11. Feladat. Ha egy $(n \times n)$ -es determináns mindegyik elemét megszorozzuk egy c számmal, akkor a determináns értéke...

- (a) a c -szeresére változik. (b) a c^n -szeresére változik.
(c) a c^{n^2} -szeresére változik. (d) nem változik.

MEGOLDÁS. (b)

2.12. Feladat. Ha egy (5×5) -ös trianguláris mátrix főátlójának minden eleme negatív, akkor a mátrix determinánsa...

- (a) 0. (b) negatív. (c) pozitív. (d) 1.

MEGOLDÁS. (b)

2.13. Feladat. Melyik igaz minden négyzetes mátrixra az alábbiak közül? Ha a mátrix két sorát felcseréljük, akkor...

- (a) a mátrix determinánsa nem változik. (b) a mátrix determinánsa 0 lesz.
(c) a mátrix determinánsa a -1 -szeresére változik. (d) a mátrix determinánsa a reciprokára változik.

MEGOLDÁS. (c)

2.14. Feladat. Egy (100×100) -as mátrix első sorába leírtuk az első 100 pozitív egész számot. Majd minden további sorába az előző sor elemeinek kétszeresét írtuk (ugyanolyan sorrendben). Az így kapott mátrix determinánsa...

- (a) 100. (b) $100!$. (c) 2. (d) 0.

MEGOLDÁS. (d)

2.15. Feladat. Melyik igaz minden négyzetes mátrixra az alábbiak közül? Ha a mátrix egyik sorának c -szeresét hozzáadjuk a mátrix egy másik sorához, akkor...

- (a) a mátrix determinánsa nem változik. (b) a mátrix determinánsa 0 lesz.
(c) a mátrix determinánsa a -1 -szeresére változik. (d) a mátrix determinánsa a c -szeresére változik.

MEGOLDÁS. (a)

2.16. Feladat. Az $|AB| = |A| \cdot |B|$ egyenlet...

- (a) bármely A, B mátrix esetén teljesül.
(b) bármely A, B négyzetes mátrix esetén teljesül.
(c) bármely A, B azonos méretű négyzetes mátrix esetén teljesül.
(d) bármely A, B diagonális, négyzetes mátrix esetén teljesül.

MEGOLDÁS. (c)

2.17. Feladat. Legyen A és B ($n \times n$)-es valós mátrix, c valós szám. Melyik igaz az alábbiak közül?

- (a) $|AB| = |A + B|$. (b) $|cA| = c|A|$. (c) $|AB| = |BA|$. (d) $|A^T B| \neq |AB^T|$.

MEGOLDÁS. (c)

[■ ■ ■ ■ ■ ■ ■ ■]

NEHEZEBB FELADATOK

2.18. Feladat. Számítsuk ki az $\begin{vmatrix} 60 & 84 \\ 210 & 140 \end{vmatrix}$ determináns értékét anélkül, hogy az $ad - bc$ képletet, illetve törteket használnánk. Ha a fenti módszert egy általános $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ mátrixra alkalmazzuk, akkor végül milyen számmal nulláznánk ki az oszlopát vagy sorát?

2.19. Feladat. Determinánsok értékét ki lehet számítani még a Bareiss-algoritmussal is. Ismertessük ezt az algoritmust, majd mutassuk meg, hogy bármely (3×3) -as egész értékű mátrixra tényleg annak determinánsát határozza meg.

2.20. Feladat. Helyettesítsük az $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 5 & 7 & -2 \\ 4 & 5 & 1 \end{vmatrix}$ determináns első sorának egy elemét egy valós számmal úgy, hogy a keletkező determináns 0 legyen.

2.21. Feladat. Igazoljuk, hogy bármely, nem 0 értékű determináns első sorában található olyan elem, amit le lehet úgy cserélni, hogy a kapott determináns már 0 legyen.

2.22. Feladat. Igaz-e, hogy bármely 0 értékű determináns első sorában megváltoztatható egy elem úgy, hogy a kapott determináns értéke már ne 0 legyen?

2.23. Feladat. Egy determináns főátlójában minden elem γ , a többi helyen pedig δ áll. Számítsuk ki a determináns értékét.

2.24. Feladat. Legyen $n \geq 3$ természetes szám. Számítsd ki az alábbi $(n \times n)$ -es determinánsok értékét.

$$(a) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}; \quad (b) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}; \quad (c) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

2.25. Feladat. Igazak-e a következő állítások (ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, adjunk ellenpéldát):

- (a) Ha egy mátrix minden eleme racionális szám és a determinánsa $\frac{1}{8}$, akkor a mátrixban van olyan elem, amelynek nevezője páros szám.
- (b) Ha egy mátrix determinánsa páros szám, akkor a mátrix minden eleme páros szám.
- (c) Ha egy mátrix determinánsa páros szám, akkor a mátrix valamelyik eleme páros szám.

2.26. Feladat. Igazak-e a következő állítások (ha igen, bizonyítsuk be, ha nem, adjunk ellenpéldát):

- (a) Ha egy (2×2) -es mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix mindkét sora [valamelyik sora] a másik sorának konstansszorosa.
 - (b) Ha egy (3×3) -as mátrix determinánsa 0, akkor a mátrix valamelyik sora valamelyik másik sorának konstansszorosa.
-