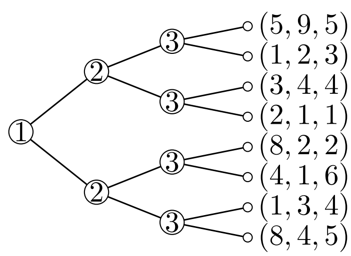
Játékelmélet

dolgozat mintafeladatok

Tudnivalók

- **A CooSpace-en az előadás színterében található egy Minta-dolgozat a „Gyakorlótesztek”-nél, amit ezekből a mintafeladatokból állítottam össze.** A gyakorlóteszt kitöltésének eredményét én nem látom. Ügyeljenek, hogy a válaszokat a megadott formában írják. Azokra a feladatokra, amihez „fájl feltöltés” kell, a gyakorlóteszt automatikusan maximális pontot ad. Ha a vizsgatesztben ilyen feladat szerepel majd, akkor a teljes feladatmegoldást kell beküldeni. Írja rá a nevét és Neptun-kódját is, fényképezze le, és töltse fel. A Minta-dolgozatban szereplő pontszámok csak tájékoztató jellegűek, még változhatnak.
- Az **elméleti kérdésekhez** egy külön (bővebb) tesztet készítettem, ez is a „Gyakorlótesztek”-nél található a CooSpace-en.
- **Kérem, ellenőrizzék, hogy a Minta-dolgozatot ki tudják-e tölteni a CooSpace-en.** Ha nem, a problémát tapasztaló hallgatók készítsenek képernyőképet a problémáról, jelöljék meg pontosan a kurzust és gyakorlótesztet (legjobb, ha a böngésző címsorát másolják le ehhez), jegyezzék fel, hogy milyen operációs rendszer alatt milyen böngészőt használtak, majd ezeket az információkat küldjék meg a fejlesztői supportra a CooSpace legfelső ikonsorában lévő fogaskerék melletti boríték ikon „hibabejelentés” pontjával. **Tabletről, telefonról a kitöltés ellenjavallt.**
- A dolgozatot megírásánál önálló munkát várok.
- A feladatok megoldására 105 perc áll rendelkezésükre.

1. Feladat. (5 pont) Határozza meg a következő véges fával ábrázolt játék egyensúlyi pontját.



Megoldás. $(8, 4, 5)$

2. Feladat. (5 pont) Az alábbi A mátrix egy 2×2-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $X = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $Y^T = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, a játék éréke $v = \frac{8}{3}$.

3. Feladat. (5 pont) Az alábbi A mátrix egy 2×3-as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg grafikus módszer segítségével mindkét játékos optimális stratégiáját.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 2 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $X = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$, $Y^T = \left(0, \frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

4. Feladat. (5 pont) Az alábbi B mátrix egy 3×3-as szimmetrikus mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 2 \\ 3 & 0 & -4 \\ -2 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $X = Y^T = \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}\right)$, a játék éréke $v = 0$. (Ennél a feladattípusnál mindig $X = Y^T$ és $v = 0$ teljesül.)

5. Feladat. (5 pont) Az alábbi B mátrix egy 3×3-as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét. (Segítség: mind az első, mind a második játékos optimális stratégiájának mind a három komponense pozitív.)

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $X = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right)$, $Y^T = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right)$, $v = \frac{15}{7}$. (Ennél a feladattípusnál X és Y^T áltatlában nem egyenlő.)

6. Feladat. (5 pont) Oldja meg a következő normál feladatot szimplex algoritmus segítségével. ($x_1, x_2, x_3 \geq 0$)

$$\begin{array}{rrrcc} x_1 & & +x_3 & \leq & 2 \\ & x_2 & +2x_3 & \leq & 1 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq & 3 \\ \hline 3x_1 & +x_2 & +2x_3 & \to & \max \end{array}$$

Megoldás. $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = 0$, a célfüggvény optimuma: $z = \frac{13}{6}$.

7. Feladat. (5 pont) Az alábbi mátrix egy 2×2-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg az egyik játékos optimális stratégiáját lineáris programozás segítségével.

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás. $Y^T = \left(\frac{3}{8}, \frac{5}{8}\right)$.

8. Feladat. (5 pont) Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáit és a hozzá tartozó kifizetéseket annál a 2×2-es bimátrixjátéknál, ahol az 1. játékos kifizetéseit a következő A mátrix, a 2. játékos kifizetéseit pedig az A' mátrix tartalmazza.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A' = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Megoldás.

(1) $x = 0$, $y = 1$: $X = (0, 1)$, $Y^T = (1, 0)$, $E_1(0, 1) = 0$, $E_2(0, 1) = 4$;
(2) $x = 1$, $y = 0$: $X = (1, 0)$, $Y^T = (0, 1)$, $E_1(0, 1) = 4$, $E_2(0, 1) = 0$;
(3) $x = y = \frac{2}{3}$: $X = Y^T = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $E_1\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = E_2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

9. Feladat. (5 pont) Az $A = \{x, y, z, u\}$ az alternatívák halmaza, és 20 szavazó esetén a preferencia-sorrendek legyenek:

- $x \succ z \succ u \succ y$: 8 szavazónál,
- $z \succ x \succ y \succ u$: 7 szavazónál,
- $y \succ z \succ u \succ x$: 5 szavazónál.

Határozza meg, hogy a Borda-pontozás alapján mi a közös sorrend.

Megoldás. $z \succ x \succ y \succ u$

10. Feladat. (5 pont) Végezzen $(0, 1)$-normalizációt az (N, v) 5-személyes kooperatív játékon, ha $N = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, és a karakterisztikus függvény tetszőleges $S \subseteq N$ koalícióra a következő:

$$v(S) = \begin{cases} 1, & \text{ha } |S| = 1; \\ 3, & \text{ha } |S| = 2; \\ 5, & \text{ha } |S| = 3; \\ 8, & \text{ha } |S| = 4; \\ 10, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

Megoldás. $c = \frac{1}{5}$, $a_i = -\frac{1}{5}$, $i = 1, \ldots, 5$.

$$v'(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } |S| = 1; \\ \frac{1}{5}, & \text{ha } |S| = 2; \\ \frac{2}{5}, & \text{ha } |S| = 3; \\ \frac{4}{5}, & \text{ha } |S| = 4; \\ 1, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

11. Feladat. (5 pont) Legyen (N, v) 3-személyes kooperatív játék, ahol $N = \{1, 2, 3\}$, és a karakterisztikus függvény tetszőleges $S \subseteq N$ koalícióra a következő:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } S = \emptyset; \\ 5, & \text{ha } S = \{1\}; \\ 6, & \text{ha } S = \{2\}; \\ 0, & \text{ha } S = \{3\}; \\ 12, & \text{ha } S = \{1, 2\}; \\ 7, & \text{ha } S = \{1, 3\}; \\ 8, & \text{ha } S = \{2, 3\}; \\ 20, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

Határozza meg a játékhoz tarozó Shapley-értéket.

Megoldás. $\Phi(v) = \left(\frac{47}{6}, \frac{53}{6}, \frac{10}{3}\right)$.

12. Feladat. (5 pont) Legyen (N, v) 3-személyes kooperatív játék, ahol $N = \{1, 2, 3\}$, és a szuperadditív karakterisztikus függvény tetszőleges $S \subseteq N$ koalícióra a következő:

$$v(S) = \begin{cases} 0, & \text{ha } S = \{1\}; \\ 3, & \text{ha } S = \{2\}; \\ 1, & \text{ha } S = \{3\}; \\ 4, & \text{ha } S = \{1, 2\}; \\ 4, & \text{ha } S = \{1, 3\}; \\ 6, & \text{ha } S = \{2, 3\}; \\ 8, & \text{ha } S = N. \end{cases}$$

Határozza meg az elosztások halmazát és a játék magját.

Megoldás.

$$\begin{aligned} E(v) &= \{(x_1, x_2, x_3) \colon x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 3,\ x_3 \geq 1,\ x_1 + x_2 + x_3 = 8\}, \\ C(v) &= \{(x_1, x_2, x_3) \colon 0 \leq x_1 \leq 2,\ 3 \leq x_2 \leq 4,\ 1 \leq x_3 \leq 4,\ x_1 + x_2 + x_3 = 8\}. \end{aligned}$$

13. Feladat. Döntse el, hogy igaz vagy hamis az állítás. Rossz válasz esetén 50%-os pontlevonás jár (pl. 2 pont helyett −1 pont), ha nincs válasz, 0 pont.

I H

○ ○ Egy mátrixjáték alsóértéke mindig kisebb vagy egyenlő, mint a felsőértéke. (Igaz.)

○ ○ Nincs olyan mátrixjáték, amelynek több nyeregpontja van. (Hamis.)

○ ○ Ha egy mátrixjáték esetén az első játékos az i. stratégiáját alkalmazva a játék értékénél kevesebb kifizetést érne el, akkor az optimális stratégiájában $x_i = 0$. (Igaz.)

○ ○ Legyen az $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mátrix egy 2×2-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Ha $a < b,\ a < c,\ d < c,\ d < b$, akkor van nyeregpont. (Hamis.)

○ ○ A szimplex algoritmusnál a bázismegoldás esetén a változók 0-val egyenlők. (Hamis.)

○ ○ Bimátrixjátékok esetén az első játékos annyit nyer, amennyit a második veszít. (Hamis.)

○ ○ Vickrey-aukció esetén nem éri meg nagyobb ajánlatot adni a termékért, mint amennyit ér a licitáló számára a termék. (Igaz.)

○ ○ Van olyan (N, v) kooperatív játék, amelyhez több különböző $(0, 1)$-normalizált játék tartozik, amellyel stratégiailag ekvivalens. (Hamis.)

○ ○ A Shapley-érték i. komponense legfeljebb akkora, mint amekkora kifizetést az i. játékos egyedül elérne. (Hamis.)

○ ○ Van olyan kooperatív játék, amelynek magja üres. (Igaz.)