Tiszta vs. kevert tétel (bizonyítással)

Jelölés: $A_{i\cdot}$: az A mátrix i. sorvektora, $A_{\cdot j}$: az A mátrix j. oszlopvektora.

Tétel: (Tiszta vs. kevert tétel) Legyen A egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és v a játék értéke.

(1) Legyen Y^* a második játékos optimális stratégiája. Ha
$$A_{i\cdot}Y^* < v,$$
akkor $x_i^* = 0$ az első játékos X^* optimális stratégiájában.

(2) Legyen X^* az első játékos optimális stratégiája. Ha
$$X^*A_{\cdot j} > v,$$
akkor $y_j^* = 0$ a második játékos Y^* optimális stratégiájában.

Bizonyítás: Az (1) állítást bizonyítjuk, a (2) állítás bizonyítása hasonló.
Mivel Y^* a második játékos optimális stratégiája, így ha az első játékos az i-edik tiszta stratégiáját alkalmazza ellene, a nyereménye kisebb vagy egyenlő, mint játék értéke:
$$A_{i\cdot}Y^* \leq v, \quad i = 1, \ldots, m.$$
Jelölje R, J a következő index halmazokat:
$$R = \{i : A_{i\cdot}Y^* < v\}, \quad J = \{i : A_{i\cdot}Y^* = v\}.$$
Ekkor:
$$\begin{aligned} v &= X^*AY^* = \sum_{i=1}^{m} x_i^* A_{i\cdot}Y^* \\ &= \sum_{i\in R} x_i^* A_{i\cdot}Y^* + \sum_{i\in J} x_i^* A_{i\cdot}Y^* \\ &= \sum_{i\in R} x_i^* A_{i\cdot}Y^* + \sum_{i\in J} x_i^* v. \end{aligned}$$
Átrendezve
$$v - \sum_{i\in J} x_i^* v = \sum_{i\in R} x_i^* A_{i\cdot}Y^*,$$
$$v\Big(1 - \sum_{i\in J} x_i^*\Big) = \sum_{i\in R} x_i^* A_{i\cdot}Y^*.$$
Mivel X^* komponensei valószínűségeket jelölnek, így $\sum_{i=1}^{m} x_i^* = 1$. Továbbá R és J index halmazok diszjunktak, egyesítésük pedig kiadja az összes indexet, ezért $1 - \sum_{i\in J} x_i^* = \sum_{i\in R} x_i^*$. Ezt felhasználva kapjuk:
$$v \sum_{i\in R} x_i^* = \sum_{i\in R} x_i^* A_{i\cdot}Y^* \Rightarrow \sum_{i\in R} (v - A_{i\cdot}Y^*) x_i^* = 0.$$
Mivel R mindenegyes i elemére $v - A_{i\cdot}Y^* > 0$ ezért szükségképpen ezen i indexekre $x_i^* = 0$.

■