Bimátrixjátékok, gazdasági alkalmazások

(előadásjegyzet, 2020. április 8.)

Kátai-Urbán Kamilla

A mátrixjátékok nullaösszegű játékok, azaz az egyik játékos nyeresége, a másik vesztesége, így egy mátrixszal tudtuk ábrázolni a kifizetéseket (kifizetési mátrix). Az első előadáson szerepeltek nem-nullaösszegű játékok is, ilyen volt pl. a fogoly-dilemma. Az ilyen típusú játékoknál a kifizetések ábrázolásához már nem elég egy mátrix, a két játékos kifizetését külön-külön mátrixszal lehet felírni, ezek a *bimátrixjátékok*.

1. A 2×2-es bimátrixjátékok megoldása

Egy 2×2-es bimátrixjáték esetén legyen az $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mátrix az első játékos, az $A' = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ pedig a második játékos kifizetési mátrixa. Az első játékos optimális stratégiája legyen $X = (x, 1-x)$, a második játékos optimális stratégiája pedig $Y^T = (y, 1-y)$. A kevert satratégiát egyértelműen meghatározza az (x, y) pár.

- Az első játékos várható kifizetését jelölje az X, Y stratégia esetén: $E_1(x, y)$.
- A második játékos várható kifizetését jelölje az X, Y stratégia esetén: $E_2(x, y)$.

Egy stratégiát akkor nevezünk optimálisnak, ha egyensúlyi helyzet van, azaz ha a játékos egyoldalúan eltér ettől a stratégiától, akkor nem járhat jobban. Tehát ha az (x, y) pár a két játékos optimális stratégiáját jellemzi, akkor pl. $E_1(0, y) \leq E_1(x, y)$ teljesül, ugyanis ekkor az első játékos az optimális stratégiája helyett a második stratégiájával játszik, így nem nyerhet többet. Ehhez hasonlóan kapjuk a többi egyenlőtlenséget is:

1. $E_1(0, y) \leq E_1(x, y)$,
2. $E_1(1, y) \leq E_1(x, y)$,
3. $E_2(x, 1) \leq E_2(x, y)$,
4. $E_2(x, 0) \leq E_2(x, y)$.

Ahogy a mátrixjátékoknál, úgy itt is az XAY szorzat segítségével meg lehet adni az első játékos kifizetését abban az esetben, ha az X, illetve az Y stratégiával játszik a két játékos, tehát:

$$E_1(x, y) = XAY = \left(\begin{smallmatrix} x, & 1-x \end{smallmatrix}\right) A \left(\begin{smallmatrix} y \\ 1-y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} x, & 1-x \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} y \\ 1-y \end{smallmatrix}\right)$$

Az 1. egyenlőtlenség a következőképpen alakítható:

$$\begin{aligned}
E_1(x, y) &\geq E_1(0, y) \\
XAY &\geq \left(\begin{smallmatrix} 0, & 1 \end{smallmatrix}\right) AY \\
\left(X - \left(\begin{smallmatrix} 0, & 1 \end{smallmatrix}\right)\right) AY &\geq 0 \\
\left(\left(\begin{smallmatrix} x, & 1-x \end{smallmatrix}\right) - \left(\begin{smallmatrix} 0, & 1 \end{smallmatrix}\right)\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} y \\ 1-y \end{smallmatrix}\right) &\geq 0 \\
\left(\begin{smallmatrix} x, & -x \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} y \\ 1-y \end{smallmatrix}\right) &\geq 0 \\
x\left(\begin{smallmatrix} 1, & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} y \\ 1-y \end{smallmatrix}\right) &\geq 0
\end{aligned}$$

Ha elvégezzük az $\left(\begin{smallmatrix} 1, & -1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ szorzást, akkor az $\left(\begin{smallmatrix} a-c, & b-d \end{smallmatrix}\right)$ mátrixot kapjuk. Ezt megszorozva az $\left(\begin{smallmatrix} y \\ 1-y \end{smallmatrix}\right)$ mátrixszal az $ay - cy + b - d - by + dy = (a - b - c + d)y - (d - b)$ kifejezéshez jutunk. Vezessük be a $Q = a - b - c + d$ és a $q = d - b$ jelöléseket, így a fenti egyenlőtlenég a következő alakú lesz:

$$\begin{aligned}
x\left((a - b - c + d)y - (d - b)\right) &\geq 0 \\
xQy - qx &\geq 0. \qquad (1)
\end{aligned}$$

Ha a 2. egyenlőtlenséget az 1. egyenlőtlenséghez hasonlóan mátrixos formában felírnánk, azt lehetne megfigyelni, hogy az egyenlőtlenség megfordul, és az x szerepét az $1-x$ veszi át, más szempontból a számolás ugyanúgy zajlik, tehát a következő egyenlőtlenséghez jutunk:

$$(1 - x)Qy - q(1 - x) \leq 0. \qquad (2)$$

Vizsgáljuk az (1) és (2) egyenlőtlenségeket. A Q és q értékétől függően több eset lehetséges:

(i) $Q = 0$

(a) $q = 0: \ 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1;$
(b) $q > 0: $ (1)-ből $x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1;$
(c) $q < 0: $ (2)-ből $x = 1, \quad 0 \leq y \leq 1.$

(ii) $Q > 0$

(a) $x = 0,$ (2)-ből $y \leq \frac{q}{Q};$
(b) $x = 1,$ (1)-ből $y \geq \frac{q}{Q};$
(c) $0 < x < 1,$ (1)-ből $x(Qy - q) \geq 0, \ y \geq \frac{q}{Q},$ (2)-ből $(1 - x)(Qy - q) \leq 0, \ y \leq \frac{q}{Q},$ így $y = \frac{q}{Q}.$

(iii) $Q < 0$

(a) $x = 0, \ y \geq \frac{q}{Q};$
(b) $x = 1, \ y \leq \frac{q}{Q};$
(c) $0 < x < 1, \ y = \frac{q}{Q}.$

Az 1. és 2. egyenlőtlenségekhez hasonlóan a 3. és 4. egyenlőtlenségekből megkaphatók a következők az $R = a' - b' - c' + d'$ és az $r = d' - c'$ jelöléseket bevezetve:

$$Rxy - ry \geq 0, \tag{3}$$
$$Rx(1 - y) - r(1 - y) \leq 0. \tag{4}$$

Itt is az R és r értékétől függően több eset lehetséges:

(iv) $R = 0$

(a) $r = 0: \ 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1;$
(b) $r > 0: \ 0 \leq x \leq 1, \quad y = 0;$
(c) $r < 0: \ 0 \leq x \leq 1, \quad y = 1.$

(v) $R > 0$

(a) $y = 0, \ x \leq \frac{r}{R};$
(b) $y = 1, \ x \geq \frac{r}{R};$
(c) $0 < y < 1, \ x = \frac{r}{R}.$

(vi) $R < 0$

(a) $y = 0, \ x \geq \frac{r}{R};$
(b) $y = 1, \ x \leq \frac{r}{R};$
(c) $0 < y < 1, \ x = \frac{r}{R}.$

Ha (x, y) esetén teljesülnek az (1), (2), (3) és (4) egyenlőtlenségek alapján megkapható feltételek is, akkor egyensúlyi pontot, optimális megoldást kaptunk. Hogy a feladatmegoldáshoz könnyebben fel tudjuk használni, külön fájlban megtalálható a 2×2-es bimátrixjátékok megoldásának végeredménye itt.

1. Példa. Megoldjuk azt a 2×2-es bimátrixjátékot, ahol az 1. játékos kifizetéseit a következő A mátrix, a 2. játékos kifizetéseit pedig az A' mátrix tartalmazza.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Meghatározzuk a Q, q, R és r értékét. A $Q = a - b - c + d = 1 - 3 - 4 + 2 = -4$, $q = d - b = 2 - 3 = -1$, $R = a' - b' - c' + d' = 8 - 2 - 1 + 5 = 10$ és $r = d' - c' = 5 - 1 = 4$. Tehát a 2×2-es bimátrixjáték megoldásában található esetek közül a $Q < 0$-t és az $R > 0$-t tekintve a következőt kapjuk:

(iii) $Q = -4 < 0$

(a) $x = 0$, $y \geq \frac{q}{Q} = \frac{1}{4}$;

(b) $x = 1$, $y \leq \frac{q}{Q} = \frac{1}{4}$;

(c) $0 < x < 1$, $y = \frac{q}{Q} = \frac{1}{4}$.

(v) $R = 10 > 0$

(a) $x \leq \frac{r}{R} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, $y = 0$;

(b) $x \geq \frac{r}{R} = \frac{2}{5}$, $y = 1$;

(c) $x = \frac{r}{R} = \frac{2}{5}$, $0 < y < 1$.

Akkor kapunk egyensúlyi helyzetet, ha az (x, y) pár valamelyik Q-nál és R-nél szereplő feltételt is teljesíti. Ha tekintjük a Q-nál lévő (a) feltételt, akkor nem találunk olyan R szerintit, ami teljesítené, ezek a feltételek egymásnak ellentmondanak. Hasonló a helyzet a Q-nál megadott (b) feltétel esetén is. Ha a Q-nál a (c)-t tekintjük, az teljesíti az R-nél megadott (c) feltételt is, így az $x = \frac{2}{5}$, $y = \frac{1}{4}$ egyensúlyi pontot fognak adni. Ekkor az első játékos optimális stratégiája $X = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$, a második játékosé $Y^T = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$. Az első játékos kifizetése a következő mátrixszorzásokkal számolható ki:

$$E_1(x, y) = E_1\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{4}\right) = XAY = \left(\tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \left(\tfrac{14}{5}, \tfrac{12}{5}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{50}{20} = \frac{5}{2}.$$

Az második játékos kifizetése pedig a következő mátrixszorzásokkal számolható ki:

$$E_2(x, y) = E_2\left(\frac{2}{5}, \frac{1}{4}\right) = XA'Y = \left(\tfrac{2}{5}, \tfrac{3}{5}\right)\left(\begin{smallmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \left(\tfrac{19}{5}, \tfrac{19}{5}\right)\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{19}{5}.$$

Tehát az optimális megoldás az első játékos esetén $X = \left(\frac{2}{5}, \frac{3}{5}\right)$, ekkor $\frac{5}{2}$ a kifizetés, a második játékos esetén $Y^T = \left(\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right)$, és ekkor $\frac{19}{5}$ a kifizetése.

Az előző példában szereplő játéknak egy egyensúlyi helyzete volt, de ez nem minden esetben van így, ld. 2. példa.

2. Példa. Megoldjuk a feladatsor **33. feladatát.**

(*Ajándékozási-dilemma*) A Young házaspárnak mindössze két kincse van, Jim családi örökségéből származó aranyórája és Della szép, hosszú haja. Karácsonyra meg akarják lepni egymást valami szép ajándékkal. Tudják egymásról, hogy mire vágynak; Jim egy óraláncra, Della pedig egy fésűs csatra. Mivel szegények, ezért pénzt csak a meglévő kincsük eladásával tudnak szerezni, de ezzel értéküket vesztik az ajándékok is. Ha mindketten eladják az értékeiket, akkor annak a szituációnak az értéke legyen 0. Az ajándékozás örömét értékeljük 2 egységgel, a megajándékozott örömét 1 egységgel. Oldja meg a feladathoz tartozó bimátrixjátékot.

Felírjuk a bimátrixjátékhoz tartozó két kifizetési mátrixot:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Meghatározzuk a Q, q, R és r értékét, a $Q = R = 0 - 2 - 1 + 0 = -3$ és $q = r = 0 - 2 = -2$. Tehát a 2×2-es bimátrixjáték megoldásában található esetek közül a $Q < 0$-t és az $R < 0$-t tekintve a következőt kapjuk:

(iii) $Q = -3 < 0$

(a) $x = 0$, $y \geq \frac{q}{Q} = \frac{2}{3}$;

(b) $x = 1$, $y \leq \frac{q}{Q} = \frac{2}{3}$;

(c) $0 < x < 1$, $y = \frac{q}{Q} = \frac{2}{3}$.

(vi) $R = -3 < 0$

(a) $x \geq \frac{r}{R} = \frac{2}{3}$, $y = 0$;

(b) $x \leq \frac{r}{R} = \frac{2}{3}$, $y = 1$;

(c) $x = \frac{r}{R} = \frac{2}{3}$, $0 < y < 1$.

Akkor kapunk egyensúlyi helyzetet, ha az (x, y) pár valamelyik Q-nál és R-nél szereplő feltételt is teljesíti.

(1) Ha tekintjük a Q-nál lévő (a) feltételt, akkor ez az R-nél található (b) feltételt is teljesíti, tehát $x = 0$ és $y = 1$. Ekkor a kifizetések leolvashatók az A és A' mátrixokból, mivel az első játékos a 2. tiszta stratégiájával játszik, a második pedig az 1. tiszta stratégiájával, így $E_1(0, 1) = 1$, $E_2(0, 1) = 2$.

(2) Ha a Q-nál a (b) feltételt tekintjük, akkor ezek teljesítik az R szerinti (a)-t, így $x = 1$ és $y = 0$. Mivel tiszta stratégiákat alkalmaznak az előző esethez hasonlóan: $E_1(1, 0) = 2$, $E_2(1, 0) = 1$.

(3) Az $x = \frac{2}{3}$, $y = \frac{2}{3}$ pár pedig teljesíti mindkét (c) feltételt, így itt is egyensúlyi helyzetet kapunk. Az első játékos kifizetése:

$$E_1(x, y) = E_1\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = XAY = \left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}\right)\left(\begin{smallmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{4}{3}\right)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}.$$

A második játékos kifizetése hasonlóan számolható, $E_2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

Összegezve a következő egyensúlyi pontokat és kifizetéseket kaptuk:

(1) $X = (0, 1)$, $Y^T = (1, 0)$, $E_1(0, 1) = 1$, $E_2(0, 1) = 2$;

(2) $X = (1, 0)$, $Y^T = (0, 1)$, $E_1(0, 1) = 2$, $E_2(0, 1) = 1$;

(3) $X = Y^T = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$, $E_1\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = E_2\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}$.

Tehát ennél a feladatnál több egyensúlyi pont van, és ezek nem felcserélhetők, így a házaspár akkor tud jó megoldást hozni, ha kooperál.

3. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **32., 34., 35. feladatát.**

2. A bimátrixjátékok gazdasági alkalmazásai

Egy ágazatot *oligopóliumnak* neveznek, ha csak néhány vállalatból áll, a döntésekben az ágazat többi szereplőit is figyelembe kell venni. Egy ágazat *duopólium*, ha csak két vállalatból áll[1].

4. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **36.** (*Duopólium*) és **37.** (*Legnagyobb kedvezmény elve*) **feladatát**.

5. Megjegyzés. A **37. feladatban** leírt *legnagyobb kedvezmény elvénél* a vállalatok lemondanak arról, hogy nyerjenek az árcsökkentésen, helyette egy olyan rendszert alakítanak ki, ahol az árcsökkentés veszteséghez vezet, ezzel biztosítják, hogy egyik vállalat se akarjon a másik alá ígérni. Ehhez hasonló helyzetet teremt, amikor az eladó azzal az ajánlattal fordul a vevőhöz, hogy ha alacsonyabb árat talál a piacon, akkor tőle is azon az áron veheti meg az árut. Ezzel arra ösztönzi a vevőt, hogy jelezze, ha a versenytárs árat csökkent, így kisebb lesz a valószínűsége, hogy a vállalatok árkedvezményt nyújtsanak.

6. Példa. (*Duopólium profitja*) Két vállalat nyereségét mutatja a következő táblázat. Három stratégia közül választhatnak: nulla, kicsi vagy nagy kibocsátás.

		2. vállalat		
		nulla	kicsi	nagy
1. vállalat	nulla	0, 0	0, 15	0, 20
	kicsi	15, 0	13, 13	8, 14
	nagy	20, 0	14, 8	5, 5

Aszerint, hogy egyidejűleg döntenek-e a vállalatok, vagy egymás után (szekvenciálisan)a következő két esetet különböztetjük meg:

[1] Ez a fejezet a J. Hirshleifer, A. Glazer, D. Hirshleifer: *Mikroökonómia* könyv felhasználásával készült.

1. eset: Egyidejű döntések esetén egy bimátrixjátékot kapunk, amelynél a kicsi-nagy párok egyensúlyi helyzetek, azaz egyik vállalatnak sem éri meg egyoldalúan változtatni rajta.
2. eset: Szekvenciális döntésnél több eset lehetséges, attól függően, hogy hány válaszlépés lehet, most két esetet vizsgálunk.
   (a) Abban az esetben, ha először az 1. vállalat lép, majd a 2. erre reagálhat, az első vállalat nagy kibocsátást választ. Ugyanis a második vállalat ahhoz, hogy ebben a helyzetben a számára legjobb döntést hozza, a kis kibocsátás mellett kell döntenie, azaz egyensúlyi helyzet áll elő.
   (b) Tekintsük most azt az esetet, amikor először az első vállalt lép, majd a második, de tudja, hogy az első vállalatnak még van egy válaszlépésre lehetősége. Ekkor az első vállalat bármit lép, a második magas kibocsátást választ, és úgy kerülnek egyensúlyi helyzetbe, ha az első vállalat alacsony kibocsátás mellett dönt.

3. Árverések

Az *árverés* egy olyan adásvételi eljárás, amely során a beérkezett licitek közül a legmagasabb ajánlatot tevő vásárolhatja meg a terméket.

7. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **38. feladatát**, adjuk meg, hogyan zajlik az *angol árverés* és a *holland árverés*.

A feladatban szereplő árverések úgynevezett többkörös árverések, de vannak olyan árverések is, ahol egy alkalommal, és minden licitáló egyszerre adja le a licitjét. Ilyen egy körös árverés például a *zárt licites árverés*, ahol a licitáló leírja az ajánlatát és lezárja azt egy borítékba. Az árut a legmagasabb ajánlatot tevő személy kapja. A következő árverés a zárt licites árverések egy formája, a Vicrey-aukció vagy filatelista árverés (bélyegárverés). Az utóbbi név onnan származik, hogy ezt a fajta árverést a bélyeggyűjtők használták. Az első elnevezés William Vickrey tiszteletére alakult ki, aki az árverésekkel kapcsolatos munkájáért 1996-ban Nobel-díjat kapott.

8. Definíció. *Vickrey-aukció* esetén a résztvevők (játékosok) zárt borítékban leadják az ajánlataikat, az nyer, aki a legnagyobb licitet adta, de a második legnagyobb ajánlat összegét kell kifizetnie.

9. Tétel. *Vickrey-aukció esetén az i. játékos egyetlen optimális stratégiája, ha az i. játékos licitjének értéke megegyezik az áru értékével az i. számára, azaz az optimális stratégia az igazmondás.*

Bizonyítás: Legyen az i. játékos számára az áru értéke v_i, az érte adott ajánlat pedig b_i, továbbá jelölje z a többi játékos licitjei közül a maximális összeget. Azt kell belátni, hogy $b_i = v_i$, feltesszük, hogy ez nem igaz.

(a) Legyen $v_i < b_i$, azaz felül licitálja az árut:
   - ha $z < v_i$, akkor v_i-t és b_i-t ajánlva is nyer.
   - ha $b_i < z$, akkor ugyanúgy veszít, mintha v_i-t mondana.
   - ha $v_i < z < b_i$, akkor b_i-t ajánlva megnyeri a licitet, de a haszna $v_i - z < 0$, míg ha v_i-t mond, nem lenne vesztesége.

(b) Legyen $b_i < v_i$, azaz alul licitálja az árut:
   - ha $v_i < z$, akkor akár b_i-t, akár v_i-t mond, veszít.
   - ha $z < b_i$, akkor v_i-t és b_i-t ajánlva is nyer.
   - ha $b_i < z < v_i$, akkor v_i-t ajánlva nyer, és ekkor a haszna $v_i - z > 0$, míg b_i esetén elveszíti a licitet, tehát 0 a haszna.

A fentiekből látszik, ha $b_i \neq v_i$, akkor a v_i ajánlattal jobban járna, tehát az optimális stratégia $b_i = v_i$.

Érdekes játék a *dolláráverés*[2], ahol 1 dollárt árvereznek el 1 cent kikiáltási árról indulva. Az nyeri a licitet, aki a legtöbbet ajánlja, de nemcsak a győztesnek kell fizetni, hanem aki az utolsó előtti licitet mondta, az is kifizeti, amit ajánlott, de nem kap semmit. Martin Shubik (1971) megfigyelései alapján általában 3,4 dollárért kelt el 1 dollár. Minél nagyobb a társaság, annál nagyobb eséllyel mennek bele a magasabb licitbe, de általában két ember marad, akik egymásra licitálnak. Többször is addig folyt a licit, míg az egyik licitáló az összes pénzét felajánlotta. Laboratóriumi körülmények között is hasonló eredményre vezettek a kísérletek. Az ilyen típusú szituációk a gazdasági életben (pl. Concorde-csapda), politikában (pl. fegyverkezési verseny) és a természetben is megfigyelhetők. Az állatvilágban hasonló helyzet az úgynevezett pózolás, amit azt jelenti, hogy a két rivális fenyegető pózba áll, és úgy néz szembe egymással, ahelyett, hogy verekednének. Itt a befektetett idő, amit mindkét "játékos" elveszít, és csak az szerzi meg a jutalmat (táplálékot, nőstényt), aki később adja fel. Sok esetben véletlen stratégiát alkalmaznak ilyen szituációban az állatok, ami annak felel meg, mintha kevert stratégiával játszanának.

[2]Mérő László *Mindenki másképp egyforma* című könyvében is szerepel ez a játék