Lineáris programozás és a mátrixjátékok

(előadásjegyzet, 2020. március 30.)

Kátai-Urbán Kamilla

1. Elemi bázistranszformáció

Tekintsük a következő táblázatot:

$$\begin{array}{c|ccccc} & v_1 & \dots & v_i & \dots & v_k \\ \hline \\ e_1 & a_{11} & \dots & a_{1i} & \dots & a_{1k} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_j & a_{j1} & \dots & a_{ji}^* & \dots & a_{jk} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_n & a_{n1} & \dots & a_{ni} & \dots & a_{nk} \end{array},$$

Az elemi bázistranszformációt a következőképpen hajtjuk végre:

- választunk egy generáló elemet: olyan nem 0 számot, amely e-vel jelölt sorban, és v-vel jelölt oszlopban van, a fenti táblázatban legyen ez az a_{ji},
- felcseréljük a generáló elem sor- és oszlopjelét,
- a generáló elemet lecseréljük a reciprokára,
- a generáló elem sorának többi elemét elosztjuk a generáló elemmel,
- a generáló elem oszlopának többi elemét elosztjuk a generáló elem -1-szeresével,
- a többi elemet a következő "téglalapszabállyal" számoljuk.

A táblázatban "téglalapszabály" segítségével azon elemek számíthatók, amelyek nincsenek egy sorban, illetve oszlopban a generáló elemmel. Egy ilyen elem, a generáló elemmel együtt, egy téglalap két szemközti csúcsát adja:

$$\begin{array}{c|cccc} & v_1 & v_2 & v_3 & v_4 \\ \hline e_1 & b & . & d & . \\ e_2 & . & . & . & . \\ e_3 & a^* & . & c & . \end{array}$$

Ebben az esetben, az új táblázatban a d helyére $d - \frac{bc}{a}$ kerül, vagy más formában: $\frac{ad-bc}{a}$.

Az eredeti táblázat az a_{ji} generáló elemmel végrehajtott elemi bázistranszformáció után a következő alakú lesz:

$$\begin{array}{c|ccccc} & v_1 & \dots & e_j & \dots & v_k \\ \hline e_1 & a_{11} - \frac{a_{j1}a_{1i}}{a_{ji}} & \dots & -\frac{a_{1i}}{a_{ji}} & \dots & a_{1k} - \frac{a_{jk}a_{1i}}{a_{ji}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_i & \frac{a_{j1}}{a_{ji}} & \dots & \frac{1}{a_{ji}} & \dots & \frac{a_{jk}}{a_{ji}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ e_n & a_{n1} - \frac{a_{j1}a_{ni}}{a_{ji}} & \dots & -\frac{a_{ni}}{a_{ji}} & \dots & a_{nk} - \frac{a_{jk}a_{ni}}{a_{ji}} \end{array}.$$

1. Példa. Hajtsunk végre elemi bázistranszformációt a következő táblázaton, a generáló elem legyen a *-gal jelölt elem.

$$\begin{array}{c|ccc} & v_1 & v_2 & v_3 \\ \hline e_1 & 2 & -2 & 1 \\ e_2 & 0 & -2 & 3 \\ e_3 & 1 & 2^* & -3 \end{array} \qquad \begin{array}{c|ccc} & v_1 & e_3 & v_3 \\ \hline e_1 & 3 & 1 & -2 \\ e_2 & 1 & 1 & 0 \\ v_2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{-3}{2} \end{array}$$

2. Megjegyzés. Az elemi bázistranszformáció a következő részben szereplő szimplex algoritmus egy fontos lépése, de más esetben is használható, pl. egy *mátrix inverzének* meghatározására. Ha egy négyzetes mátrixot beírunk a táblázatba, és elemi bázistranszformációk sorozatával az összes v jelű oszlopot sikerül megcserélni az e jelű sorokkal (azaz az összes oszlopvektort bevisszük a bázisba), akkor a mátrix inverzét kapjuk. Ha nem tudjuk bevinni az összes oszlopvektort, akkor a mátrixnak nincs inverze. A mátrix inverzének megadásakor az indexeknek növekvő sorrendben kell szerepelnie, ehhez oszlop és sorcseréket hajthatunk végre.

3. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **23. feladatát**.

2. Szimplex algoritmus

4. Definíció. Az alábbi formájú problémát *normál feladatnak* nevezzük:

$$\begin{array}{rcc}
a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n & \leq & b_1 \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n & \leq & b_m \\
y_1, y_2, \ldots, y_n & \geq & 0 \\
\hline
c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n & \to & \max,
\end{array},$$

ahol $b_1, \ldots, b_m \geq 0$, az utolsó sort *célfüggvénynek* nevezzük.

A szimplex táblázat:

	y_1	y_2	$\ldots$	y_n	
u_1	a_{11}	a_{12}	$\ldots$	a_{1n}	b_1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
u_m	a_{m1}	a_{m2}	$\ldots$	a_{mn}	b_m
	c_1	c_2	$\ldots$	c_n	0

5. Definíció. *Bázismegoldásnak* nevezzük, ha a bázisba bekerült változók a megfelelő jobboldali konstansokkal egyenlők, a többi változó pedig 0 értéket vesz fel.

6. Példa.

$$\begin{array}{rcc}
-2y_1 - 2y_2 - 2y_3 & \leq & 3 \\
2y_1 + y_2 - 3y_3 & \leq & 4 \\
y_1, y_2, y_3 & \geq & 0 \\
\hline
-2y_1 - 3y_2 - 5y_3 & \to & \max,
\end{array},$$

normál feladat. Szimplex táblázata:

	y_1	y_2	y_3	
u_1	-2	-2	-2	3
u_2	2	1	-3	4
	-2	-3	-5	0

A bázismegoldás: $u_1 = 3$, $u_2 = 4$, $y_1 = y_2 = y_3 = 0$.

Szimplex algoritmus.

1. lépés: Ha a célfüggvény (az utolsó sor) nem tartalmaz pozitív együtthatót, akkor vége az eljárásnak a bázismegoldás optimális, az optimum értéke a táblázat jobb alsó sarkában lévő szám (-1)-szerse. Ellenkező esetben a 2. lépés következik.

2. lépés: Vegyük a pozitív célfüggvényegyütthatók maximumát (ha vannak egyformák, válasszuk a legkisebb indexűt). Ha a kiválasztott célfüggvény együttható (c_i) oszlopában nem szerepel pozitív együttható, akkor a célfüggvény felülről nem korlátos. Ellenkező esetben a 3. lépés következik.

3. lépés: A kiválasztott célfüggvény együttható (c_i) oszlopában szereplő pozitív együtthatók közül választjuk ki a generálóelemet. Azt választjuk, ahol a megfelelő jobboldali konstans (b_j) és a pozitív együttható (a_{ji}) hányadosa minimális. A minimális hányadoshoz tartozó együtthatóval, mint generálóelemmel elemi bázistranszformációt hajtunk végre a táblázaton. (Azért van szükség a minimális b_j/a_{ji} kiválasztására, mert így a jobboldali konstansok egyike se válik negatívvá az elemi bázistranszformáció után, így teljesül a $y_k \geq 0$ feltétel.) Az elemi bázistranszformácó után kapott táblázattal folytatjuk az eljárást az 1. lépéstől.

7. Megjegyzés.

- Az algoritmus hibája, hogy előfordulhat, hogy végtelen ciklusba kerül, vagyis folyamatosan választva generáló elemeket, mindig visszatérünk egy korábbi táblázathoz.
- A generáló elem kiválasztásának bonyolításával az algoritmus gyorsítható, valamint a végtelen ciklusok elkerülhetők.

8. Példa. Megoldjuk a feladatsor **24. feladatát**
Oldja meg a következő normál feladatot szimplex algoritmus segítségével. ($y_1, y_2, y_3 \geq 0$)

$$\begin{array}{rrrcc} & y_2 & +3y_3 & \leq & 1 \\ y_1 & +2y_2 & -y_3 & \leq & 5 \\ 2y_1 & & +y_3 & \leq & 2 \\ \hline 2y_1 & +4y_2 & +y_3 & \rightarrow & \max \end{array}$$

	y_1	y_2	y_3	
u_1	0	1^*	3	1
u_2	1	2	-1	5
u_3	2	0	1	2
	2	4	1	0

	y_1	u_1	y_3	
y_2	0	1	3	1
u_2	1	-2	-7	3
u_3	2^*	0	1	2
	2	-4	-11	-4

	u_3	u_1	y_3	
y_2				1
u_2				2
y_1				1
	-1	-4	-12	-6

Mivel a célfüggvény nem tartalmaz pozitív együtthatót, vége az eljárásnak a bázismegoldás optimális: $y_1 = 1$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$, és a célfüggvény értéke: $z = 6$.

9. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **25., 26. feladatát**.

3. A lineáris programozás és a mátrixjátékok kapcsolata

10. Definíció. Két mátrixjáték *stratégiailag ekvivalens*, ha az optimális stratégiák a két mátrixjátéknál megegyeznek.

11. Tétel. *Ha egy mátrixjáték kifizetési mátrixának minden eleméhez hozzáadunk egy rögzített c számot, az eredetivel stratégiailag ekvivalens mátrixjátékot kapunk, ahol a játék értéke v-ről $v + c$-re változik.*

Legyen $A = (a_{ij})_{m\times n}$ egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és v a játék értéke. Az előző tétel alapján feltehetjük, hogy $a_{ij} > 0$, ekkor $v > 0$ is teljesül.

Az Optimális stratégia tétele szerint, ha az Y a második játékos optimális stratégiája, akkor $A_i.Y \leq v$, $i = 1, 2, \ldots, m$, amiből a következőt kapjuk:

$$\begin{array}{rcl} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \ldots + a_{1n}y_n & \leq & v \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \ldots + a_{mn}y_n & \leq & v \\ y_1, y_2, \ldots, y_n & \geq & 0 \\ y_1 + y_2 + \ldots + y_n & = & 1 \end{array}$$

Ha elosztjuk az összes egyenlőtlenséget és egyenletet v-vel, a következő normál feladatot kapjuk:

$$\begin{array}{rcc} a_{11}y'_1 + a_{12}y'_2 + \ldots + a_{1n}y'_n & \leq & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}y'_1 + a_{m2}y'_2 + \ldots + a_{mn}y'_n & \leq & 1 \\ y'_1, y'_2, \ldots, y'_n & \geq & 0 \\ \hline y'_1 + y'_2 + \ldots + y'_n & \rightarrow & \max, \end{array}$$

ahol $y'_j = \frac{y_j}{v}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Mivel az utolsó sorban $\frac{1}{v}$ szerepelne a második játékosnak az a célja, hogy ezt maximalizálja.

Az Optimális stratégia tétele szerint, ha az X az első játékos optimális stratégiája, akkor $v \leq XA_{\cdot j},\ j = 1, 2, \ldots, n$. Ebből az előzőhöz hasonló egyenlőtlenségrendszer adódik, annyi különbséggel, hogy A helyett A^T szerepel, továbbá $\leq$ helyett $\geq$. A v-vel való osztás utána következőt kapjuk:

$$\begin{array}{rcc} a_{11}x'_1 + a_{21}x'_2 + \ldots + a_{m1}x'_m & \geq & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n}x'_1 + a_{2n}x'_2 + \ldots + a_{nm}x'_m & \geq & 1 \\ x'_1, x'_2, \ldots, x'_m & \geq & 0 \\ \hline x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_m & \rightarrow & \min, \end{array}$$

ahol $x'_i = \frac{x_i}{v}$, $i = 1, 2, \ldots, m$. Mivel az utolsó sorban $\frac{1}{v}$ szerepelne az első játékos célja, hogy ezt minimalizálja.

12. Definíció. (Dualitás) *Primál feladatnak* nevezzük a következőt:

$$\begin{array}{rcc} A\underline{y} & \leq & \underline{b} \\ \underline{y} & \geq & \underline{0} \\ \hline \underline{c}\underline{y} & \rightarrow & \max. \end{array}$$

A következő a *duál feladat*:

$$\begin{array}{rcc} \underline{x}A & \geq & \underline{c} \\ \underline{x} & \geq & \underline{0} \\ \hline \underline{x}\underline{b} & \rightarrow & \min. \end{array}$$

A második és első játékos optimális megoldására felírt feladatok primál-duál feladatpárt alkotnak ($\underline{b}$ és $\underline{c}$ minden komponense 1). A mátrixjáték megoldása lineáris programozással megkapható.

13. Tétel. *(Erős dualitás) Ha primál feladatnak létezik optimális megoldása, akkor a duálnak is, és a célfüggvény értéke megegyezik.*

14. Példa. Megoldjuk a feladatsor **27. feladatát**.

Az alábbi mátrix egy 3×3-as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg az egyik játékos optimális stratégiáját lineáris programozás segítségével.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

A második játékos optimális stratégiájára lehet normál feladatot felírni, így azt határozzuk meg.

$$\begin{array}{rcc} y'_1 + y'_2 + 3y'_3 & \leq & 1 \\ y'_1 + 3y'_2 + 2y'_3 & \leq & 1 \\ 3y'_1 + 2y'_2 + 2y'_3 & \leq & 1 \\ y'_1, y'_2, y'_3 & \geq & 0 \\ \hline y'_1 + y'_2 + y'_3 & \rightarrow & \max, \end{array}$$

ahol $y'_j = \frac{y_j}{v}$, $j = 1,2,3$. A szimplex táblázat alakításkor a bázisból kikerülő oszlopok elhagyhatók:

	y'_1	y'_2	y'_3	
u_1	1	1	3	1
u_2	1	3	2	1
u_3	3^*	2	2	1
	1	1	1	0

	y'_2	y'_3	
u_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{2}{3}$
u_2	$\frac{7}{3}^*$	$\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$
y'_1	$\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$

	y'_3	
u_1	$\frac{15}{7}^*$	$\frac{4}{7}$
y'_2	$\frac{4}{7}$	$\frac{2}{7}$
y'_1	$\frac{2}{7}$	$\frac{1}{7}$
	$\frac{1}{7}$	$-\frac{3}{7}$

y'_3	$\frac{4}{15}$
y'_2	$\frac{2}{15}$
y'_1	$\frac{1}{15}$
	$-\frac{7}{15}$

A táblázatból leolvasható, hogy $y'_1 = \frac{1}{15}$, $y'_2 = \frac{2}{15}$, $y'_3 = \frac{4}{15}$, a célfüggvény értéke pedig: $\frac{1}{v} = \frac{7}{15}$, azaz $v = \frac{15}{7}$. A második játékos optimális stratégiája:

$$y_1 = \frac{1}{15} \cdot \frac{15}{7} = \frac{1}{7}, \quad y_2 = \frac{2}{15} \cdot \frac{15}{7} = \frac{2}{7}, \quad y_3 = \frac{4}{15} \cdot \frac{15}{7} = \frac{4}{7}, \qquad Y^T = \left(\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}\right).$$

15. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **28. feladatát**. Továbbá adjuk meg lineáris programozás segítségével a második játékos optimális stratégiáját a feladatsor **7.-22. feladataiban** szereplő mátrixjátékok esetén. (Megjegyezzük, hogy ezeket a feladatokat a korábban ismertetett módszerek segítségével egyszerűbb megoldani.)

Ahhoz, hogy ne csak normál alakú feladatot tudjunk megoldani, például hogy az első játékos optimális stratégiáját is meg tudjuk határozni, a kétfázisú módszert kell használni. Ez a módszer csak kiegészítő anyag, sem a zh-n, sem a vizsgán nem kérem számon.

4. Kétfázisú módszer (kiegészítő anyag)

Egy lineáris programozási feladat nem biztos, hogy normál alakú, például mátrixjátékoknál az első játékos optimális stratégiájának meghatározásakor $\geq$ kikötések fordulnak elő. Az is lehet, hogy az összefüggések között $=$ szerepel. Az ilyen típusú problémák megoldására alkalmazzuk a kétfázisú módszert.

1. lépés: Ha valamelyik jobboldali konstans nem pozitív, akkor szorozzuk (-1)-gyel az egyenlőtlenséget. Ha célfüggvénynél minimumot kell meghatározni, akkor azt is szorozzuk meg (-1)-gyel. Ha valamelyik összefüggésben szerepel $\geq$, akkor alakítsuk át egyenlőséggé új nem negatív változó bevezetésével a következőképpen:

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{im}x_m \geq b_i \quad \Leftrightarrow \quad a_{i1}x_1 + \ldots + a_{im}x_m - v = b_i.$$

2. lépés: Az 1. lépés átalakításai után csak $=$ és $\leq$ szerepel. A *táblázatot* úgy készítjük el, hogy ahol egyenlőség van, ott a kiemelt változókat *-gal jelöljük, ezek a mesterséges változók. A cél az, hogy a mesterséges változók 0 értéket vegyenek fel, azaz a táblázat felső sorába kerüljenek. Ha felkerültek, nem szabad visszahozni, így az oszlopukat el is hagyjuk a táblázatból. Kialakítunk egy *másodlagos célfüggvényt* is, ami úgy keletkezik, hogy az egyenlőség jellegű kifejezések megfelelő együtthatóit összeadjuk (azaz azokban a sorokban adjuk össze, ahol a *-gal jelölt változók szerepelnek). A sarokelemet úgy kapjuk, hogy a jobboldali konstansokat összeadjuk ezekben a sorokban. A táblázat elkészítését mutatja a lenti példa.

3. lépés: Az *első fázisban* a másodlagos célfüggvény szerint optimalizálunk (ld. Szimplex algoritmus). Ha a másodlagos célfüggvény szerinti optimumnál a másodlagos sarokelem nem nulla, akkor nincs a feladatnak lehetséges megoldása. Ha a másodlagos sarokelem 0, és *-os változók már nem szerepelnek, akkor következhet az 4. lépés (második fázis). Ha maradtak *-os változók, akkor akár negatív generálóelem is választható ahhoz, hogy a felső sorba kerüljenek, és elhagyjuk őket. Abban az esetben, ha már csak 0 van a *-os változó sorában, akkor elhagyható az egész sor.

4. lépés: A *második fázisban* az elsődleges célfüggvény szerint keressük meg az optimális megoldást (ld. Szimplex algoritmus).

16. Példa. Az 1. és 2. lépést megmutatjuk egy példán keresztül.

$$
\begin{array}{rcl}
-x_1 - x_2 - x_3 & \geq & -10 \\
2x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 12 \\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \geq & 4 \\
2x_1 + x_2 + x_3 & \geq & 2 \\
x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \\
\hline
-x_1 - 2x_2 - 4x_3 & \to & \min
\end{array}
\quad \Leftrightarrow \quad
\begin{array}{rcl}
x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 10 \\
2x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 12 \\
x_1 + 2x_2 + 2x_3 - v_1 & = & 4 \\
2x_1 + x_2 + x_3 - v_2 & = & 2 \\
x_1, x_2, x_3, v_1, v_2 & \geq & 0 \\
\hline
x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \to & \max
\end{array}
$$

A szimplex táblázat:

	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	
u_1	1	1	1	0	0	10
u_2^*	2	1	4	0	0	12
u_3^*	1	2	2	-1	0	4
u_4^*	2	1	1	0	-1	2
	1	2	4	0	0	0
	5	4	7	-1	-1	18

17. Példa. Megoldjuk a feladatsor **30. feladatát**.

Az alábbi mátrix egy 2×2-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg az első játékos optimális stratégiáját kétfázisú módszer segítségével.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Az Optimális stratégia tétele alapján, ha $X = (x_1, x_2)$ az első játékos optimális stratégiája, akkor

$$(x_1, x_2) \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \geq (v, v)$$

teljesül, amelyből a következő egyenlőtlenségrendszer írható fel:

$$
\begin{array}{rcl}
3x_1 + x_2 & \geq & v \\
2x_1 + 6x_2 & \geq & v \\
x_1, x_2 & \geq & 0 \\
x_1 + x_2 & = & 1.
\end{array}
$$

Mivel a mátrix minden eleme pozitív, így v, a játék értéke is pozitív. A v-vel történő osztás, és $x_1' = \frac{x_1}{v}$, $x_2' = \frac{x_2}{v}$ helyettesítés után a következő lineáris programozási feladatot kapjuk:

$$
\begin{array}{rcl}
3x_1' + x_2' & \geq & 1 \\
2x_1' + 6x_2' & \geq & 1 \\
x_1', x_2' & \geq & 0 \\
\hline
x_1' + x_2' = \frac{1}{v} & \to & \min.
\end{array}
$$

A kétfázisú módszer 1. lépését elvégezve a következő feladathoz jutunk:

$$
\begin{array}{rcl}
3x_1' + x_2' - v_1 & = & 1 \\
2x_1' + 6x_2' - v_2 & = & 1 \\
x_1', x_2' & \geq & 0 \\
\hline
-x_1' - x_2' & \to & \max.
\end{array}
$$

Végrehajtjuk a kétfázisú módszer lépéseit:

	x_1'	x_2'	v_1	v_2	
u_1^*	3	1	-1	0	1
u_2^*	2	6^*	0	-1	1
	-1	-1	0	0	0
	5	7	-1	-1	2

	x_1'	v_1	v_2	
u_1^*	$\frac{8}{3}^*$	-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$
x_2'	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{-1}{6}$	$\frac{1}{6}$
	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$
	$\frac{8}{3}$	-1	$\frac{1}{6}$	$\frac{5}{6}$

	v_1	v_2	
x_1'			$\frac{5}{16}$
x_2'			$\frac{1}{16}$
	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{3}{8}$
	0	0	0

Ahol a bázismegoldás optimális: $x_1' = \frac{5}{16}$, $x_2' = \frac{1}{16}$, $z = -\frac{3}{8}$, ahonnan $v = \frac{8}{3}$, így $x_1 = \frac{5}{16} \cdot \frac{8}{3} = \frac{5}{6}$, $x_2 = \frac{1}{16} \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{6}$, tehát az első játékos optimális stratégiája $X = \left(\frac{5}{6}, \frac{1}{6}\right)$.