A 3×3-as mátrixjátékok

(előadásjegyzet, 2020. március 16.)

Kátai-Urbán Kamilla

1. A 3×3-as szimmetrikus mátrixjátékok megoldása

1. Definíció. Egy mátrixjátékot *szimmetrikusnak* nevezünk, ha az A kifizetési mátrixa ferdén szimmetrikus, azaz $A = -A^T$.

Legyen egy 3×3-as szimmetrikus mátrixjáték kifizetési mátrixa

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel a mátrix ferdén szimmetrikus az 1. és 2. játékos optimális stratégiái megegyeznek, és a játék értéke $v = 0$.
A következő esetekben van nyeregpont:

(1) $a > 0$, $b > 0$, ekkor az $(1, 1)$ nyeregpont,
(2) $a \leq 0$, $c \geq 0$, ekkor a $(2, 2)$ nyeregpont,
(3) $b \leq 0$, $c \leq 0$, ekkor a $(3, 3)$ nyeregpont.

Nincs nyeregpont, ha

(a) $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$,
(b) $a < 0$, $b > 0$, $c < 0$.

Tekintsük az (a) esetet. Az Optimális stratégia tétele szerint az 1. játékosnak $X = (x_1, x_2, x_3)$ optimális stratégiája akkor és csakis akkor, ha $XA_{.j} \geq v = 0$, ahol $j = 1, 2, 3$. Ez a mátrix segítségével felírható:

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix} \geq (0, 0, 0).$$

Elvégezve a mátrixszorzásokat a következő egyenlőtlenség-rendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} -ax_2 - bx_3 &\geq 0 \\ ax_1 - cx_3 &\geq 0 \\ bx_1 + cx_2 &\geq 0. \end{aligned}$$

Az egyenlőtlenségeket átrendezve, figyelembe véve, hogy az (a) esetben a, $-b$, és c is pozitív, kapjuk a következőt:

$$\begin{aligned} \tfrac{x_3}{a} &\geq \tfrac{x_2}{-b} \\ \tfrac{x_1}{c} &\geq \tfrac{x_3}{a} \\ \tfrac{x_2}{-b} &\geq \tfrac{x_1}{c}. \end{aligned}$$

Tehát azt kaptuk, hogy $\frac{x_3}{a} \geq \frac{x_2}{-b} \geq \frac{x_1}{c} \geq \frac{x_3}{a}$, mivel az első és utolsó kifejezés megegyezik, ezért egyenlőtlenség helyett egyenlőség írható. Jelöljük t-vel a hányadosok értékét: $\frac{x_3}{a} = \frac{x_2}{-b} = \frac{x_1}{c} = t$, tehát $x_1 = tc$, $x_2 = t(-b)$, $x_3 = tc$. Mivel x_1, x_2, x_3 a megfelelő stratégiák valószínűségét jelöli, így $x_1 + x_2 + x_3 = 1$ teljesül, amelyből $t = \frac{1}{a-b+c}$ kifejezést kapjuk. A t helyébe ezt az összefüggést beírva az x_1, x_2, x_3 megadható.

A 3×3-as szimmetrikus mátrixjáték esetén a játék értéke 0, valamint az 1. és a 2. játékos optimális stratégiája, ha $a > 0$, $b < 0$, $c > 0$:

$$x_1 = \frac{c}{a - b + c}, \quad x_2 = \frac{-b}{a - b + c}, \quad x_3 = \frac{a}{a - b + c}.$$

A (b) esetben a mátrix 2., 3. sorának, majd 2., 3. oszlopának felcserélésével az (a) esethez jutunk.

2. Példa. Tekintsük a kő-papír-olló játék mátrixát. Mivel ez a mátrix az előző (b) esetnek felel meg, így végrehajtjuk a sor és oszlopcseréket, és használjuk a formulát.

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Tehát $a = 1$, $b = -1$, $c = 1$, így $x_1 = \frac{1}{1-(-1)+1} = \frac{1}{3}$, $x_2 = \frac{1}{3}$, $x_3 = \frac{1}{3}$.

Az x_2 és x_3 értékét fel kell cserélni ahhoz, hogy az eredeti játékhoz tartozó valószínűsegeket kapjuk (ezek most megegyeznek): $X = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$.

3. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **16.** és **17. feladatát**.

2. A 3×3-as mátrixjátékok megoldása

Legyen az $A = (a_{ij})$ egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és legyen a játék értéke v. Használni fogjuk a következő két tételt, ami korábban már szerepelt.

Tiszta vs kevert tétel következménye: Legyen X az első játékos, Y a második játékos optimális stratégiája.

(1) Ha X i. komponensére $x_i > 0$, akkor $A_{i\cdot}Y = v$.
(2) Ha Y j. komponensére $y_j > 0$, akkor $XA_{\cdot j} = v$.

Optimális stratégia tétele:

(1) Az X az első játékos optimális stratégiája $\Longleftrightarrow$ $v \leq XA_{\cdot j}, \ j = 1, 2, \ldots, n$.
(2) Az Y a második játékos optimális stratégiája $\Longleftrightarrow$ $A_{i\cdot}Y \leq v, \ i = 1, 2, \ldots, m$.

A megoldás menete

1. lépés: Nyeregpontot keresünk. Ha van, akkor megoldottuk a feladatot. Ha nincs, akkor a játék értéke a sor minimumok maximuma és az oszlop maximumok minimuma között lesz, folytatjuk a 2. lépésnél.

2. lépés: Dominált sorokat illetve oszlopokat keresünk. Ha találunk, akkor a 4. lépésnél folytatjuk a megoldást. Ha nem találtunk elhagyható sort vagy oszlopot, akkor a 3. lépéssel folytatjuk.

3. lépés: Vizsgáljuk, hogy lehetséges-e, hogy mind az első, mind a második játékos optimális megoldásának mind a három komponense pozitív legyen. Ekkor alkalmazhatjuk a Tiszta vs. kevert tétel következményét. Továbbá mivel az x_i-k és az y_i-k valószínűségek, így $\sum_{i=1}^{3} x_i = \sum_{i=1}^{3} y_i = 1$ teljesül.

(a) Mivel feltettük, hogy $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ a Tiszta vs. kevert tétel következményét felhasználva a következőt kapjuk a második játékos Y optimális stratégiájára.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v \\ v \end{pmatrix}.$$

Elvégezve a beszorzást, valamint az y_i-kre, mint valószínűségekre vonatkozó feltételeket hozzávéve, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 &= v \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 &= v \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 &= v \end{aligned} \tag{1}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$y_1 > 0 \ y_2 > 0 \ y_3 > 0$$

Ezt az egyenletrendszert kell megoldani hogy megkapjuk a második játékos optimális megoldását. Az $y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 > 0$ feltételt elhagyjuk, a végén ellenőrizzük le majd, hogy az egyenletek megoldásai teljesítik-e. Az egyenletrendszer így 4 egyenletet és 4 ismeretlen tartalmaz (y_1, y_2, y_3, v). Az egyenletek és az ismeretlenek számát is 1-gyel csökkenthetjük azáltal, hogy az első egyenletből kivonjuk a másodikat, a másodikból pedig a harmadikat:

$$\begin{aligned}
(a_{11} - a_{21})y_1 + (a_{12} - a_{22})y_2 + (a_{13} - a_{23})y_3 &= 0 \\
(a_{21} - a_{31})y_1 + (a_{22} - a_{32})y_2 + (a_{23} - a_{33})y_3 &= 0 \\
y_1 + y_2 + y_3 &= 1
\end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{array}{lll}
k_1 = a_{11} - a_{21} & k_2 = a_{12} - a_{22} & k_3 = a_{13} - a_{23} \\
k_4 = a_{21} - a_{31} & k_5 = a_{22} - a_{32} & k_6 = a_{23} - a_{33}
\end{array}$$

A most bevezetett jelölésekkel az egyenletrendszer a következő lesz:

$$\begin{aligned}
k_1 y_1 + k_2 y_2 + k_3 y_3 &= 0 \\
k_4 y_1 + k_5 y_2 + k_6 y_3 &= 0 \\
y_1 + y_2 + y_3 &= 1
\end{aligned} \tag{2}$$

Ezt az egyenletrendszert legegyszerűbb a Cramer-szabály alapján megoldani (ha $D \neq 0$):

$$D = \begin{vmatrix} k_1 & k_2 & k_3 \\ k_4 & k_5 & k_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k_2 & k_3 \\ k_5 & k_6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} k_1 & k_3 \\ k_4 & k_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ k_4 & k_5 \end{vmatrix}$$

$$y_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & k_2 & k_3 \\ 0 & k_5 & k_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} k_2 & k_3 \\ k_5 & k_6 \end{vmatrix}}{D}$$

$$y_2 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & 0 & k_3 \\ k_4 & 0 & k_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_3 \\ k_4 & k_6 \end{vmatrix}}{D}$$

$$y_3 = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_2 & 0 \\ k_4 & k_5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} k_1 & k_2 \\ k_4 & k_5 \end{vmatrix}}{D}$$

Az eddigi számolást célszerű az (1) egyenletrendszer bővített mátrixán elvégezni. (Bővített mátrixot úgy kapjuk, hogy az egyenletrendszer mátrixához hozzáírjuk utolsó oszlopként a jobboldali konstansok oszlopát.) Kivonjuk az első sorból a második sort, a másodikból a harmadikat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & v \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & v \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & v \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} k_1 & k_2 & k_3 & 0 \\ k_4 & k_5 & k_6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Az utóbbi mátrixból már kiszámítható könnyebben y_1, y_2, y_3. Ellenőrizzük az $y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 > 0$ feltételeket, ha nem tejesülnek a 4. lépésnél folytatjuk. Ha teljesülnek az egyenlőtlenségek a játék értéke is kiszámítható az (1) első három egyenlete közül valamelyikbe az y_1, y_2, y_3 helyettesítésével.

(b) A második játékos optimális megoldásához hasonlóan kapható meg az első játékos optimális megoldása. Mivel $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, $y_3 > 0$ a Tiszta vs. kevert tétel következményét felhasználva a következőt kapjuk az első játékos $X = (x_1, x_2, x_3)$ optimális stratégiájára.

$$(x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (v, v, v).$$

Elvégezve a beszorzást, valamint az x_i-kre, mint valószínűségekre vonatkozó feltételeket hozzávéve, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 &= v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 &= v \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 &= v \end{aligned} \tag{3}$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 > 0 \; x_2 > 0 \; x_3 > 0$$

A második egyenletből kivonjuk a harmadikat, az elsőből a másodikat:

$$\begin{aligned} (a_{11} - a_{12})x_1 + (a_{21} - a_{22})x_2 + (a_{31} - a_{32})x_3 &= 0 \\ (a_{12} - a_{13})x_1 + (a_{22} - a_{23})x_2 + (a_{32} - a_{33})x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned} \tag{4}$$

Legyen

$$\begin{array}{lll} \ell_1 = a_{11} - a_{12}, & \ell_2 = a_{21} - a_{22} & \ell_3 = a_{31} - a_{32} \\ \ell_4 = a_{12} - a_{13} & \ell_5 = a_{22} - a_{23} & \ell_6 = a_{32} - a_{33} \end{array}.$$

Ezzel a jelöléssel a (4) egyenletrendszerből a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \ell_1x_1 + \ell_2x_2 + \ell_3x_3 &= 0 \\ \ell_4x_1 + \ell_5x_2 + \ell_6x_3 &= 0 \; . \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned}$$

A Cramer-szabály alapján megkapjuk az x_1, x_2, x_3 ismeretleneket:

$$D = \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_5 & \ell_6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_3 \\ \ell_4 & \ell_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ \ell_4 & \ell_5 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & \ell_5 & \ell_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_5 & \ell_6 \end{vmatrix}}{D}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & 0 & \ell_3 \\ \ell_4 & 0 & \ell_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_3 \\ \ell_4 & \ell_6 \end{vmatrix}}{D}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 & 0 \\ \ell_4 & \ell_5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ \ell_4 & \ell_5 \end{vmatrix}}{D}$$

Megjegyezzük, hogy a második játékos optimális stratégiájának kiszámításakor is D-vel jelöltük az együttható mátrix determinánsát, de ez nem véletlen, a két determináns értéke megegyezik.
Ha a második játékos optimális stratégiának kiszámolásához hasonlóan bővített mátrix segítségével szeretnénk megkapni az x_i-ket, akkor tekintsük a (3) egyenletrendszert. Látszik, hogy itt az egyenletrendszer mátrixa nem a kifizetési mátrix, hanem annak transzponáltja.

Kivonva az első sorból a második sort, a másodikból a harmadikat, olyan mátrixot kapunk, amiből az x_1, x_2, x_3 könnyebben számítható:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{21} & a_{31} & v \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & v \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & v \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & 0 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

4. lépés: Foglalkozzunk most azzal az esettel, amikor a 3×3-as mátrixjáték megoldása helyettesíthető, egy kisebb mátrixjáték megoldásával.

(a) Ha a 2. lépésben a dominálás miatt egy vagy több sort vagy oszlopot törültünk a játék mátrixából, akkor 2×3-as, 3×2-es illetve 2×2-es mátrixjátékként oldhatjuk meg a 3×3-as mátrixjátékot.

(b) A 3. lépésben kiderülhet, hogy nincs olyan megoldása, ahol az első és a második játékos optimális megoldásának valamennyi komponense pozitív, például a $D = 0$, vagy az optimális megoldások kiszámításakor olyan számokat kaptunk, amelyek nem lehetnek valószínűségek. Ekkor legalább egy stratégiát 0 valószínűséggel játszanak, tehát a 3×3-as mátrixjátékot vissza lehet vezetni kisebb játékra.
Nézhetjük sorra a lehetséges 2×3-as (vagy 3×2-es) feladatokat. Megnézhetjük az adott 3×3-as mátrix 9 db 2×2 részmátrixának megoldását is.
Úgy tudjuk **ellenőrizni**, hogy egy kisebb mátrixjáték megoldásával az eredeti 3×3-as mátrixjáték optimális megoldásához jutottunk, hogy mind az első, mind a második játékosra nézve a kapott megoldásoknak teljesíteni kell az Optimális stratégia tétele feltételeit a 3×3-as mátrixjátékra nézve.

4. Példa. Megoldjuk a feladatsor **19. feladatát**.

Az alábbi A mátrix egy 3×3-as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg az egyik játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét. (Segítség: mind az első, mind a második játékos optimális stratégiájának mind a három komponense pozitív.)

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 1 \\ 0 & 7 & 4 \\ 4 & 2 & 8 \end{pmatrix}.$$

A játék alsóértéke (a sorminimumok maximuma) 2, a felsőértéke (az oszlopmaximumok minimuma) 6, tehát a játék értéke $2 \le v \le 6$. Mivel a feladatban az szerepel, hogy az optimális stratégiák mindhárom komponense pozitív, így az előző algoritmus 3. lépésének (a) részével folytathatjuk. Felírjuk az (1) egyenletrendszernek megfelelő bővített mátrixot a 2. játékos optimális stratégiáira, és elvégezzük a kivonásokat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 4 & 1 & v \\ 0 & 7 & 4 & v \\ 4 & 2 & 8 & v \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & -3 & -3 & 0 \\ -4 & 5 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Az így kapott egyenletrendszert megoldhatjuk Cramer-szabállyal:

$$D = \begin{vmatrix} 6 & -3 & -3 \\ -4 & 5 & -4 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & -3 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -4 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 6 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} =$$

$$= 27 - (-36) + 18 = 81 \neq 0.$$

$$y_1 = \tfrac{27}{81} = \tfrac{1}{3}, \quad y_2 = -\tfrac{-36}{81} = \tfrac{4}{9}, \quad y_3 = \tfrac{18}{81} = \tfrac{2}{9}, \qquad Y^T = \left(\tfrac{1}{3}, \tfrac{4}{9}, \tfrac{2}{9}\right).$$

Az egyenletrendszer speciális formájából adódik, hogy az egyes komponensek számlálójában épp a D determináns kiszámításakor megjelenő aldeterminánsok szerepelnek.

A játék értéke az egyenletrendszerbe visszahelyettesítve megkapható:

$$6 \cdot y_1 + 4 \cdot y_2 + y_3 = 6 \cdot \frac{1}{3} + 4 \cdot \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = 4 = v.$$

Az első játékos optimális stratégiája hasonlóan számítható, csak az A helyett A^T szerepel a kezdeti egyenletrendszerben, $X = \left(\frac{4}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right)$.

5. Feladat. Oldjuk meg a feladatsor **18., 20., 21. feladatát**. Figyeljünk arra, hogy nem minden esetben alkalmazható az algoritmus 3. lépése.