A 2×2-es mátrixjátékok megoldása

Legyen az $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mátrix egy 2×2-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Ha van nyeregpont, akkor az annak megfelelő tiszta stratégiák adják a játék megoldását. Az alábbi két esetben nincs nyeregpont, ekkor kevert stratégiát kell alkalmazni:

1) $a < b,\ a < c,\ d < c,\ d < b$;
2) $a > b,\ a > c,\ d > c,\ d > b$.

Jelölje $X^* = \left(\begin{smallmatrix} x, & 1-x \end{smallmatrix}\right)$ az első játékos optimális kevert stratégiáját, $Y^* = \left(\begin{smallmatrix} y \\ 1-y \end{smallmatrix}\right)$ pedig a második játékos optimális kevert stratégiáját. Mivel tudjuk, hogy nem tiszta stratégiát használnak, ezért teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$0 < x < 1, \quad 0 < 1-x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < 1-y < 1.$$

Mivel az optimális stratégiák egyik komponense sem nulla a Tiszta vs. kevert tétel felhasználásával a következőket kapjuk:

$$X^*A_{\cdot 1} = v, \quad X^*A_{\cdot 2} = v, \quad A_{1\cdot}Y^* = v, \quad A_{2\cdot}Y^* = v,$$

ahol v a játék értéke és $A_{\cdot 1}$ az A mátrix első oszlopát, $A_{\cdot 2}$ a második oszlopát, $A_{1\cdot}$ az első sorát, az $A_{2\cdot}$ pedig a második sorát jelöli. A mátrix elemeivel megadva a fenti összefüggések a következő alakúak lesznek:

$$\left(\begin{smallmatrix} x & 1-x \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right) = v, \quad \left(\begin{smallmatrix} x & 1-x \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right) = v, \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} y \\ 1-y \end{smallmatrix}\right) = v, \quad \left(\begin{smallmatrix} c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} y \\ 1-y \end{smallmatrix}\right) = v.$$

Elvégezve a mátrixszorzásokat a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} ax + c(1-x) &= v \\ bx + d(1-x) &= v \\ ay + b(1-y) &= v \\ cy + d(1-y) &= v. \end{aligned}$$

Az első két egyenletnél a baloldalakat egyenlővé téve kifejezhető az x, míg a második két egyenletből megkaphatjuk az y-t. Továbbá x-et visszahelyettesítve az első egyenletbe kapjuk a játék értékét, v-t:

$$x = \frac{d-c}{a-b-c+d}, \quad y = \frac{d-b}{a-b-c+d}, \quad v = \frac{ad-bc}{a-b-c+d}.$$

Vegyük észre, hogy a játék értékének kiszámításakor a számlálóban az A mátrix determinánsa szerepel.

Példa: Oldjuk meg a feladatsor **9. feladatát**.

Az alábbi A mátrix egy 2×2-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

A sorminimumok maximuma 4, az oszlop maximumok minimuma 5, így nincs nyeregpont, a játék értéke: $4 \le v \le 5$. Felhasználva a kevert stratégiákra vonatkozó korábbi formulákat:

$$x = \frac{d-c}{a-b-c+d} = \frac{5-2}{6-4-2+5} = \frac{3}{5}, \quad y = \frac{d-b}{a-b-c+d} = \frac{5-4}{6-4-2+5} = \frac{1}{5}.$$

Így az első játékos optimális stratégiája: $X^* = \left(\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right)$, a második játékos optimális stratégiája: $Y^{*T} = \left(\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right)$. A játék értéke:

$$v = \frac{ad - bc}{a - b - c + d} = \frac{30 - 8}{6 - 4 - 2 + 5} = \frac{22}{5}.$$

Feladat: Oldjuk meg a feladatsor **7.,8.** és **10.-12. feladatát**.