Tiszta vs. kevert tétel (bizonyítás nélkül)

Jelölés: $A_{i.}$: az A mátrix i. sorvektora, $A_{.j}$: az A mátrix j. oszlopvektora.

Ha A egy mátrixjáték kifizetési mátrixa, akkor az $XA_{.j}$ a várható kifizetés, amikor az első játékos az X kevert stratégiáját használja, és a második játékos a j. tiszta stratégiát. Hasonlóan az $A_{i.}Y$ kifejezés azt a várható kifizetést adja, amikor a második játékos az Y kevert stratégiát választja, az első pedig az i. tiszta stratégiát.

Tétel: (Tiszta vs. kevert tétel) Legyen $A = (a_{ij})$ egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és v a játék értéke.

(1) Legyen Y^* a második játékos optimális stratégiája. Ha
$$A_{i.}Y^* < v,$$
akkor $x_i^* = 0$ az első játékos X^* optimális stratégiájában.

(2) Legyen X^* az első játékos optimális stratégiája. Ha
$$X^*A_{.j} > v,$$
akkor $y_j^* = 0$ a második játékos Y^* optimális stratégiájában.

Bizonyítás: ld. a 4. előadásnál.

Megjegyzés: A fenti tétel (1) állítását úgy lehet szavakkal megfogalmazni, hogy ha $A_{i.}Y^* < v$ teljesül, azaz az első játékos az i. stratégiáját alkalmazva a játék értékénél kevesebbet nyerne, akkor az optimális stratégiájában nem használja az i. stragtégiát, vagyis $x_i^* = 0$. A (2) hasonlóan foglamazható meg a második játékos j. startégiájára, ott akkor rossz a stratégia, ha v-nél többet veszít a játékos.

Követekezmény: Mivel az optiámlis megoldás definíciójából adódik, hogy $A_{i.}Y^* \leq v$ teljesül, így a fenti tétel alapján, ha $x_i^* > 0$, akkor $A_{i.}Y^* = v$-t kapjuk. Hasonlóan, ha $y_j^* > 0$, akkor $X^*A_{.j} = v$ teljesül. Ezt többször is használni fogjuk a mátrixjátékok megoldása során, például a 2×2-es és a 3×3-as mátrixjátékoknál.