# Stratégiai ekvivalencia és $(0,1)$-normalizáció

**Jelölések:** $(N,v)$ azt az $n$-személyes kooperatív játékot jelöli, ahol $N=\{1,2,\dots,n\}$ a játékosok halmaza, a $v$ pedig a játékhoz tartozó karakterisztikus függvény.

**Definíció:** Az $(N,v)$ $n$-személyes kooperatív játékot *valódi (lényeges) játéknak* nevezzük, ha $v(N) > \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})$ teljesül.

**Definíció:** Az $(N,v)$ és az $(N,v')$ $n$-személyes kooperatív játékok *stratégiailag ekvivalensek*, ha léteznek olyan $a_1, a_2, \dots, a_n$ valós számok, és $c>0$ valós szám, amelyre

$$v'(S) = cv(S) + \sum_{i\in S} a_i, \quad \text{bármely } S \subseteq N\text{-re.}$$

**Megjegyzés:** A stratégiai ekvivalencia olyan reláció, amely reflexív, szimmetrikus és tranzitív, azaz ekvivalenciareláció, így tartozik hozzá egy osztályozás. A következő definíció és tétel segítségével minden osztályból kijelölhető egy speciális tulajdonságú elem.

**Definíció:** Az $(N,v)$ $n$-személyes kooperatív játék $(0,1)$-normalizált, ha teljesülnek a következők:

(1) $v(\{i\})=0$, bármely $i=1,2,\dots,n$ esetén;
(2) $v(N)=1$.

**Tétel:** Minden valódi (lényeges) $(N,v)$ $n$-személyes kooperatív játék stratégiailag ekvivalens egy egyértelműen meghatározott $(0,1)$-normalizált játékkal.

**Bizonyítás:** Keressük az $(N,v)$-vel stratégiailag ekvivalens $(N,v')$ játékot, amelyre igaz, hogy $v'(\{i\})=0$ bármely $i=1,\dots,n$-re és $v'(N)=1$, azaz az $(N,v')$ kooperatív játék $(0,1)$-normalizált. A stratégiai ekvivalencia definíciójából adódóan a következők teljesülnek:

$$v'(\{i\}) = cv(\{i\}) + a_i = 0, \quad i=1,\dots,n; \tag{1}$$

$$v'(N) = cv(N) + \sum_{i=1}^{n} a_i = 1. \tag{2}$$

Az (1) egyenletből kapjuk:

$$a_i = -cv(\{i\}). \tag{3}$$

Az (1)-ben szereplő $n$ egyenletet összegezve kapjuk: $\sum_{i=1}^{n} a_i = -c\sum_{i=1}^{n} v(\{i\})$. Ezt behelyettesítve a (2) egyenletbe

$$cv(N) - c\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) = 1. \tag{4}$$

Mivel feltettük, hogy a játék valódi, így a definíció alapján $v(N) - \sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) > 0$. Tehát a (4) egyenletből kifejezhetjük a $c$-t:

$$c = \frac{1}{v(N) - \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})} > 0. \tag{5}$$

A (3)-ba behelyettesítve, amit a $c$-re az (5)-ben kaptunk:

$$a_i = -cv(\{i\}) = \frac{-v(\{i\})}{v(N) - \sum_{i=1}^{n} v(\{i\})}. \tag{6}$$

Mivel az (1) és (2) egyértelmű megoldása az (5) és a (6), így a $v'$ is egyértelműen meghatározott, tehát egyetlen $(0, 1)$ normalizált játék van minden ekvivalenciaosztályban.