Kooperatív játék magja – bizonyítás

Definíció: Az (N, v) n-személyes kooperatív játék esetén *elosztáson* egy olyan n-komponensű $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ vektort értünk (x_i az i. játékos „része”), ami teljesíti a következő feltételeket:

(1) $x_i \geq v(\{i\})$;
(2) $\sum_{i=1}^{n} x_i = v(N)$.

Definíció: Egy (N, v) n-személyes *kooperatív játék magja* azon $x = (x_1 \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ elosztásokból áll, amelyeket egyetlen elosztás sem dominál. Jelölés: $C(v)$

Definíció: Az (N, v) kooperatív játék v karakterisztikus függvényét *szuperadditívnak* nevezzük, ha tetszőleges $S, T \subseteq N$, $S \cap T = \emptyset$ esetén, $v(S \cup T) \geq v(S) + v(T)$.

Tétel: Ha egy (N, v) n-személyes kooperatív játék v karakterisztikus függvénye szuperadditív, akkor a mag megadható a következő módon:

$$C(v) = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} x_i = v(N) \text{ és } \sum_{i \in S} x_i \geq v(S) \text{ bármely } S \subset N\text{-re} \right\}.$$

Bizonyítás:
1. rész: A megadott halmaz elemei a magban vannak.
Legyen $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ egy olyan elosztás, melyre teljesülnek a tételben szereplő feltételek. Indirekten tegyük fel, hogy létezik $y \in A(v)$ és $\emptyset \neq S \subseteq N$, hogy $y \succ_S x$, azaz x nem eleme a magnak. Ekkor a dominálás definíciója miatt $y_i > x_i$ minden $i \in S$ esetén, és $\sum_{i \in S} y_i \leq v(S)$. Ezek segítségével jutunk el a következő elletmondáshoz:

$$\sum_{i \in S} y_i \leq v(S) \leq \sum_{i \in S} x_i < \sum_{i \in S} y_i.$$

2. rész: A mag összes elemét tartalmazza a megadott halmaz.
Úgy bizonyítjuk, hogy belátjuk, ha egy x elosztás nincs a halmazban, akkor azt dominálja egy y elosztás. Vegyünk egy olyan $x \in A(v)$ vektort és egy $\emptyset \neq S \subseteq N$ koalíciót, melyre $\sum_{i \in S} x_i < v(S)$. Keresünk egy $y \in A(v)$ elosztást és egy $\emptyset \neq T \subseteq N$ koalíciót, amelyre $y \succ_T x$. Az előzőek miatt $v(S) = \sum_{i \in S} x_i + \varepsilon$, ahol $\varepsilon > 0$. Az y-t úgy állítjuk elő, hogy ε-t felosztjuk az S koalíció tagjai között, azaz $y_i = x_i + \frac{\varepsilon}{|S|}$, ha $i \in S$. Ha $i \notin S$ akkor $y_i := v(\{i\}) + \delta_i$, ahol $\delta_i \geq 0$. Így minden $i \in N$ esetén teljesül az elosztás definíciójában szereplő (1) egyenlőtlenség. Az elosztás definíciójában szereplő (2) egyenlőségnek is teljesülnie kell, tehát

$$v(N) = \sum_{i \in N} y_i = \sum_{i \in S} x_i + \varepsilon + \sum_{i \notin S} v(\{i\}) + \sum_{i \notin S} \delta_i.$$

Tudjuk, hogy $v(S) = \sum_{i \in S} x_i + \varepsilon$, ezért a következőt kapjuk átrendezés után:

$$\sum_{i \notin S} \delta_i = v(N) - v(S) - \sum_{i \notin S} v(\{i\}). \tag{1}$$

A (1) egyenlőség jobb oldala legyen δ, és definiáljuk δ_i-ket a következő formulával: $\delta_i = \delta/(n - |S|)$. Ha $\delta \geq 0$, akkor y elosztás. A v karakterisztikus függvény szuperadditív tulajdonságát használjuk fel a δ nemnegativitásához, tehát

$$\delta = v(N) - v(S) - \sum_{i \notin S} v(\{i\}) \geq v(N) - v(S) - v(N \setminus S) \geq v(N) - v(N) = 0.$$