Véges fával ábrázolt játékok

Definíció: Egy játékot *véges fával ábrázolhatónak* nevezünk, ha hozzárendelhető egy olyan véges gyökeres irányított fa, amely a következő tulajdonságokkal rendelkezik:

(1) A játék a gyökérnél kezdődik.
(2) A fa minden pontjához, ami nem levél, tarozik egy játékos, aki kiválaszthat az adott pontból kiinduló élek közül.
(3) Minden levélhez tartozik egy n-komponensű vektor, ahol n a játékosok száma. A vektor az egyes játékosok kifizetéseit adja meg.
(4) Minden játékos ismeri a fát, azaz tudja melyik csúcshoz van rendelve, és milyen kifizetések tartoznak az egyes levelekhez.

Tétel: Minden véges fával ábrázolt játéknak van legalább egy egyensúlyi pontja.

Bizonyítás: Legyen a játékosok száma n, a játékhoz tartozó fa pontjainak száma pedig M. A tételt M-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk.

1. lépés:

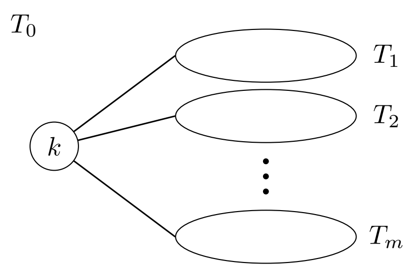
Ha a játékhoz tartozó fa 1 vagy 2 pontból áll ($M = 1$ vagy $M = 2$), akkor az állítás triviális. Ha $M = 3$ úgy, hogy a gyökérhez rendelt játékos két lehetőség közül választhat, akkor a számára kedvezőbbet választja, azaz a két levélhez tartozó n-komponensű vektornál összehasonlítja a rávonatkozó komponens értékét, és a maximális kifizetést választja. A kiválasztott levél lesz a játék egyensúlyi pontja.

2. lépés:

Tegyük fel, hogy igaz az állítás azokban az esetekben, amikor a játékhoz rendelt fa pontjainak száma M-nél kevesebb.

3. lépés:

Legyen T_0 a játékhoz tartozó M pontú fa, bebizonyítjuk, hogy van egyensúlyi pontja. Tegyük fel, hogy a gyökérnél a k. játékos választ m lehetőség közül (lásd ábra).



Ekkor a $T_1, T_2, \ldots, T_m$ részfáknak M-nél kevesebb pontja van, így az indukciós feltevés (2. lépés) szerint van egyensúlyi pontjuk. A k. játékos összehasonlítja ezeknél pontoknál a kifizetéseit, tehát ezen n-komponensű vektorok k. komponensét, és azt választja, ahol a kifizetése maximális, így megkapjuk T_0 egyensúlyi pontját.