A 2×2-es bimátrixjátékok megoldása

Egy 2×2-es bimátrixjáték esetén legyen az $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mátrix az első játékos, az $A' = \left(\begin{smallmatrix} a' & b' \\ c' & d' \end{smallmatrix}\right)$ pedig a második játékos kifizetési mátrixa. Az első játékos optimális stratégiája legyen $X = (x, 1-x)$, a második játékos optimális stratégiája pedig $Y^T = (y, 1-y)$. A kevert satratégiát egyértelműen meghatározza az (x, y) pár.

- Az első játékos várható kifizetése az X, Y stratégia esetén: $E_1(x, y)$.
- A második játékos várható kifizetése az X, Y stratégia esetén: $E_2(x, y)$.

Az optimális stratégia definíciója miatt:

1. $E_1(0, y) \le E_1(x, y)$,
2. $E_1(1, y) \le E_1(x, y)$,
3. $E_2(x, 1) \le E_2(x, y)$,
4. $E_2(x, 0) \le E_2(x, y)$.

Az 1. és 2. egyenlőtlenséggel számolva (a táblán szerepelt) kapjuk a következő összefüggéseket a $Q = a - b - c + d$ és a $q = d - b$ jelöléseket bevezetve:

(1) $Qxy - qx \ge 0$,
(2) $Q(1-x)y - q(1-x) \le 0$.

A Q és q értékétől függően több eset lehetséges:

(i) $Q = 0$

(a) $q = 0: \ 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$;
(b) $q > 0: \ $ (1)-ből $x = 0, \quad 0 \le y \le 1$;
(c) $q < 0: \ $ (2)-ből $x = 1, \quad 0 \le y \le 1$.

(ii) $Q > 0$

(a) $x = 0$, (2)-ből $y \le \frac{q}{Q}$;
(b) $x = 1$, (1)-ből $y \ge \frac{q}{Q}$;
(c) $0 < x < 1$, (1)-ből $x(Qy - q) \ge 0$, $y \ge \frac{q}{Q}$, (2)-ből $(1-x)(Qy - q) \le 0$, $y \le \frac{q}{Q}$, így $y = \frac{q}{Q}$.

(iii) $Q < 0$

(a) $x = 0$, $y \ge \frac{q}{Q}$;
(b) $x = 1$, $y \le \frac{q}{Q}$;
(c) $0 < x < 1$, $y = \frac{q}{Q}$.

Az optimális stratégia definíciójából adódó összefüggéseknél a 3. és 4. egyenlőtlenségekből megkaphatók a következők az $R = a' - b' - c' + d'$ és az $r = d' - c'$ jelöléseket bevezetve:

(3) $Rxy - ry \ge 0$,
(4) $Rx(1-y) - r(1-y) \le 0$.

Az R és r értékétől függően több eset lehetséges:

(iv) $R = 0$

(a) $r = 0: \ 0 \le x \le 1, \quad 0 \le y \le 1$;
(b) $r > 0: \ 0 \le x \le 1, \quad y = 0$;
(c) $r < 0: \ 0 \le x \le 1, \quad y = 1$.

(v) $R > 0$

(a) $y = 0$, $x \le \frac{r}{R}$;
(b) $y = 1$, $x \ge \frac{r}{R}$;
(c) $0 < y < 1$, $x = \frac{r}{R}$.

(vi) $R < 0$

(a) $y = 0,\ x \geq \frac{r}{R}$;

(b) $y = 1,\ x \leq \frac{r}{R}$;

(c) $0 < y < 1,\ x = \frac{r}{R}$.

Ha (x, y) esetén teljesülnek az (1), (2) és a (3), (4) egyenlőtlenségek alapján megkapható feltételek is, akkor egyensúlyi pontot kaptunk.