Szimmetrikus játék

**Definíció.** Egy játékot *szimmetrikusnak* nevezünk, ha az $A$ kifizetési mátrixa ferdén szimmetrikus, azaz $A = -A^T$.

Jelölje $S_1$ az első játékos összes stratégiáinak halmazát, $S_2'$ a második játékos összes stratégiájának halmazát, ahol a stratégiákat sorvektorként adjuk meg. Továbbá $T_1 \subseteq S_1$ az első játékos, $T_2 \subseteq S_2'$ pedig a második játékos optimális stratégiáinak halmazát.

**Tétel:** Legyen egy szimmetrikus játék kifizetési mátrixa $A$, a játék értéke $v$, ekkor

$$T_1 = T_2 \quad \text{és} \quad v = 0.$$

**Bizonyítás:** Legyen $X^* \in T_1$ és $Y^* \in T_2$. Mivel $X^*, Y^*$ a játék optimális megoldása, így definíció szerint

$$XAY^{*T} \leq X^*AY^{*T} \leq X^*AY^T$$

teljesül bármely $X \in S_1$, $Y \in S_2'$-re. Ezt ranszponálva kapjuk a következőt:

$$Y^*(A^T)X^T \leq Y^*A^TX^{*T} \leq YA^TX^{*T}$$

bármely $X \in S_1$, $Y \in S_2'$-re. Szorozzuk az egyenlőtlenség mindegyik oldalát $-1$-gyel, a következő egyenlőtlenséghez jutunk

$$Y^*(-A^T)X^T \geq Y^*(-A^T)X^{*T} \geq Y(-A^T)X^{*T},$$

és vegyük figyelembe, hogy a játék szimmetrikus (azaz $A$ ferdén szimmetrikus):

$$Y^*AX^T \geq Y^*AX^{*T} \geq YAX^{*T},$$

vagyis $Y^* \in T_1$ és $X^* \in T_2$, ami éppen azt jelenti, hogy $T_1 = T_2$. Továbbá a következőt kapjuk:

$$v = X^*AY^{*T} = X^*(-A^T)Y^{*T} = -X^*A^TY^{*T} = -Y^*AX^{*T} = -v,$$

amiből $v = 0$.

■